Análisis de Funciones

Funciones Polinómicas

Son aquellas funciones cuya expresión se presenta frecuentemente como las siguientes (notar que son **sumas y/o restas** de términos **potencias enteras positivas de x, incluyendo la potencia cero**):

1) Función Constante: $f(x) = 4$ (grado 0)
2) Función Lineal : $f(x) = 5x + 6$ (grado 1)
3) Función Cuadrática: $f(x) = -2x^2 + 6x + 10$ (grado 2)
4) Función Cúbica: $f(x) = 4x^3 + 7x + 18$ (grado 3)
5) Función de grado cuatro (Cuártica): $f(x) = -x^4 + x^3$
6) Función de grado cinco: $f(x) = 3x^5 - x^3 - 2$

   …..

   Y así sucesivamente

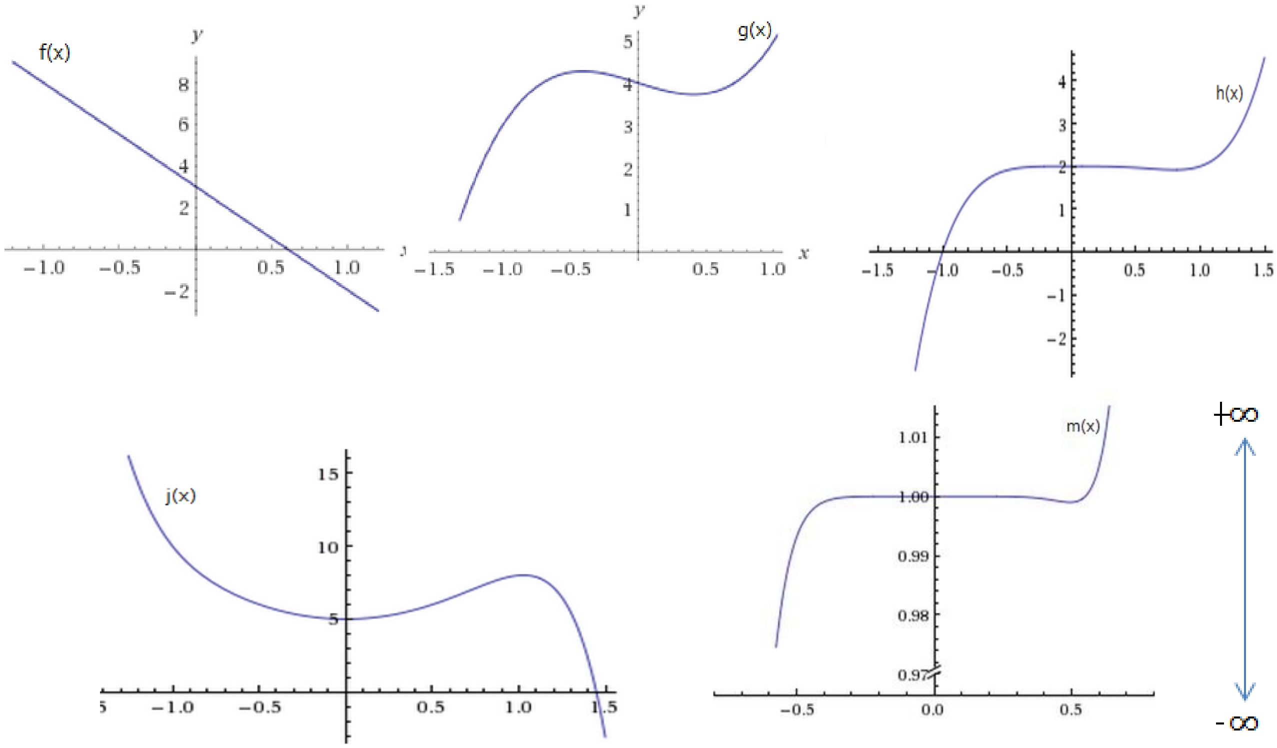
Las funciones polinómicas tienen su ***dominio*** en R (conjunto de los números reales), siendo su representación en forma de intervalo: $(-\infty, +\infty)$.

Es importante notar que, si la función polinómica que estoy analizando, tiene grado impar (1, 3, 5,…, etc.), consecuentemente, su imagen será también R.

Gráficamente, mostraremos el justificativo de la afirmación anterior. Analicemos los gráficos de las funciones lineales, cúbicas, de grado cinco y otras de grado impar, por ejemplo:

$$f(x) = -5x + 3, \quad g(x) = 2x^3 - x + 4, \quad h(x) = x^5 - x^4 + 2$$

$$j(x) = -x^7 + 4x^2 + 5, \quad m(x) = 6x^{11} - x^8 + 1$$



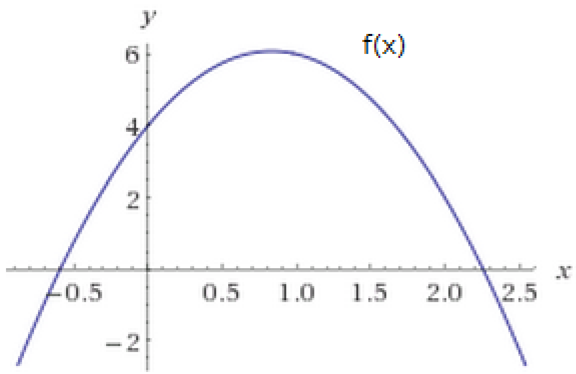
La imagen, para cada función, representa el conjunto de valores posibles que toma la función. De acuerdo a los gráficos, las funciones polinómicas de grado impar, tienen sus “ramas” apuntando en sentidos opuestos, siempre recorriendo TODOS los valores reales (desde $-\infty$ hasta $+\infty$, sobre el eje y).

Ahora, con las funciones polinómicas de grado par no sucede de esa manera.

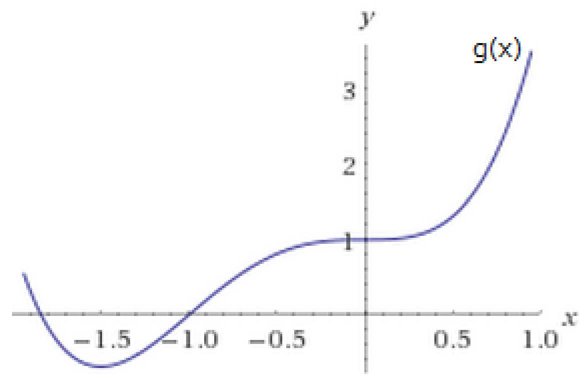
Esto es así, porque sus gráficas presentan ciertos valores mínimos o máximos absolutos, a partir de donde comienza a tomar valores tal función polinómica de grado par (recordemos, sobre el eje y).

Algunos ejemplos gráficos sobre las siguientes funciones:

$$f(x) = -3x^2 + 5x + 4, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 + 1$$



Notar que el gráfico de f(x) presenta un valor máximo absoluto cerca de x = 1



La función g(x) presenta un mínimo absoluto cerca de x = -1.5

En el caso de $f(x)$, podemos afirmar que la imagen es, con seguridad:

$$(-\infty; máx.absoluto]$$

Mientras que la función $g(x)$ tiene imagen en: $[mín.absoluto, +\infty)$

Para nuestros propósitos, sobre todo orientándonos a la primer parte del análisis de funciones, dentro del conjunto de *funciones polinómicas* centraremos la atención en las ***funciones cuadráticas***, exclusivamente.

Funciones cuadráticas

Una función cuadrática es aquella función polinómica de grado 2, que podemos encontrar en cualquiera de las tres formas siguientes:

Forma polinómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Forma canónica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

Forma factorizada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Ejemplo:

Sea $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$; hallar la forma canónica y factorizada de tal función.

Primero, observemos que $f(x)$ está en forma polinómica, e inmediatamente podemos ver que los coeficientes a, b y c están dados por:

$$a = -2, \quad b = 8, \quad c = -6$$

La pregunta es, ahora: ¿Cómo hallar la forma canónica, contando con los valores anteriores?

Recordemos la forma canónica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

Pues ya tenemos el valor "a", sólo falta saber cuánto valen x_v e y_v , respectivamente. Vamos completando de a poco:

$$f(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{-2}(x - x_v)^2 + y_v$$

Bien, pero necesitamos conocer los otros dos parámetros para completar la forma canónica. Los definimos así:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a} \qquad ; \qquad y_v = f(x_v)}$$

Esto significa que reemplazamos en la función el valor de x por 2

Con lo cual:

$$x_v = -\frac{8}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \qquad ; \qquad y_v = f(2) = -2(2)^2 + 8(2) - 6 = 2$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

Entonces, encontramos que $x_v = 2$ e $y_v = 2$ (casualmente, dieron el mismo valor, pero claro está que pueden ser valores racionales cualesquiera), con lo cual, completamos finalmente la forma canónica para la función cuadrática del ejemplo:

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v = \mathbf{-2}(x - \mathbf{2})^2 + \mathbf{2} \Longrightarrow$$ **FORMA CANÓNICA**

Volviendo al ejemplo, nos falta hallar la *forma factorizada de* $f(x)$, razón por la cual remitimos a la misma, para recordar:

Forma factorizada: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Y completamos, con la información que tenemos actualmente:

$$f(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{-2}(x - x_1)(x - x_2)$$

Pero, ¿Qué parámetros son x_1 y x_2? Se trata de las raíces (también llamadas "ceros") de la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

Para hallar las raíces de $f(x)$, igualamos la función a cero, y aplicamos la *fórmula resolvente*, también denominada "Fórmula cuadrática, o Fórmula de Bhaskara".

$$-2x^2 + 8x - 6 = 0$$

Según Bhaskara, las soluciones a la ecuación anterior están dadas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad y \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>Nota</u>: intercambiar x_1 por x_2 es lo mismo, el orden no importa.

Así, obtenemos:

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{8^2 - 4(-2)(-6)}}{2(-2)} \qquad y \qquad x_2 = \frac{-8 - \sqrt{8^2 - 4(-2)(-6)}}{2(-2)}$$

$$x_1 = \frac{-8 + \sqrt{16}}{-4} \quad y \quad x_2 = \frac{-8 - \sqrt{16}}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-4}{-4} = 1 \quad y \quad x_2 = \frac{-12}{-4} = 3$$

Luego, la forma factorizada de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, según su expresión $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, será:

$$f(x) = \underset{a}{\underset{\downarrow}{-2}}(x - \underset{x_1}{\underset{\downarrow}{1}})(x - \underset{x_2}{\underset{\downarrow}{3}})$$

FORMA FACTORIZADA

<u>Parámetros y características de una función cuadrática</u>

¿Qué información nos sirve en el análisis de una función cuadrática?

-Dominio: $(-\infty; +\infty)$

-Imagen: $(-\infty;\ y_v]$ -si el valor de "a" es negativo-; o $[y_v;\ +\infty)$ si el valor de "a" es positivo.

-Vértice: (x_v, y_v)

-Eje de simetría: $x = x_v$

-Ceros (o raíces): x_1 y x_2 –si existen, son los valores donde se corta el eje x –

-Ordenada: $f(0)$ –valor donde se corta al eje y –

-Conjuntos de positividad y negatividad

-Intervalos de crecimiento y decrecimiento

-Valor máximo o mínimo

-Gráfica

Ejemplo completo: Análisis de una función cuadrática y gráfico característico

Sea $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$; hallar para la misma: Dominio, Imagen, Vértice, Eje de simetría, Ceros (si existen), Conjuntos de positividad y negatividad, Intervalos de crecimiento y decrecimiento, Valor máximo (o mínimo). Graficar.

Como la función de este ejemplo es la que vinimos trabajando, nos servirá de mucho a la hora de hallar cada dato que nos piden.

Lo primero a tener en cuenta: SI VAS A **GRAFICAR**, ES CONVENIENTE SIEMPRE QUE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA ESTÉ EN FORMA CANÓNICA.

Recordando la forma canónica de la función del ejemplo:

$$f(x) = -2(x-2)^2 + 2$$

Observemos despacio la expresión, ya que nos dará el **vértice**, es decir, el punto (x_v, y_v), que es aquel de donde "arranca" el gráfico (estos gráficos de funciones cuadráticas se denominan PARÁBOLAS).

- Dominio: $(-\infty;\ +\infty)$
- El vértice, en este caso, sería el punto: $(2{,}2)$
- La imagen será $(-\infty; 2]$, ya que $y_v = 2$ y el valor de "a" es negativo (pues "a" vale -2).
- Eje de simetría: $x = 2$ (es decir, $x = x_v$)

- Ceros: {1; 3}   -estos son los valores de x_1 y x_2, respectivamente-. Gráficamente, serán aquellos valores en el eje x, donde se corta tal eje.
- Ordenada: Cualquiera sea la función, se calcula reemplazando x por cero. Así, obtenemos: $f(0) = -2(0)^2 + 8(0) - 6$ = -6
  Entonces, $y = -6$ es la *ordenada*, o intersección con el eje y.

- Conjuntos de positividad y negatividad: Hay varias maneras de realizar esto. En este condensado, efectuaremos la ***manera analítica***, ya que es la más general de todas (y la más formal). Acá es útil usar la forma factorizada de la función.

  Conjunto de positividad: es aquel intervalo en el cual la función resulta mayor a cero.

  Planteamos analíticamente lo enunciado a continuación:

$$f(x)\ es\ \ mayor\ a\ cero$$

$$-2(x-1)(x-3)\ \ > 0$$

Ahora bien, si lo anterior es un producto, y ese producto es mayor a cero (positivo), ¿qué posibilidades hay para los factores que componen tal producto, en el signo a poseer?

$$\underbrace{-2(x-1)}_{\boxed{\text{Primer factor}}}\underbrace{(x-3)}_{\boxed{\text{Segundo factor}}}\ \ > 0$$

Posibilidades:

1) Que el **primer factor** sea **positivo** y el **segundo factor** también sea **positivo**. Porque $+.+= \ +$ (mayor a cero es el significado del "+")
2) Que **ambos factores** sean **negativos**. Porque $-.-= \ +$ (también mayor a cero, como necesitábamos).

Resolvemos la primera cuestión, cuando ambos factores son positivos:

$$-2(x-1)>0 \qquad y \quad x-3>0$$

Tenemos que despejar x en ambas **inecuaciones**, y ver qué intervalos nos quedan.

$$x-1<\frac{0}{-2} \qquad y \qquad x>3$$

$$x<1 \quad y \quad x>3$$

Ahora, notemos que, según lo expresado por las inecuaciones, un intervalo es: $(-\infty;\ 1)$ y el otro resulta ser $(3;\ +\infty)$. Pero lo más importante es destacar que estos intervalos no se "juntan" nunca, y eso es precisamente lo definitivo para el primer caso. Como están unidos por un "y", es necesario que se junten, que compartan valores. Esta operación se llama *Intersección*. Consecuentemente, hay intersección nula, o intersección vacía. De todos modos, sólo analizamos la primer opción, y debemos ver qué sucede cuando ambos factores son negativos (menores a cero), en la segunda posibilidad:

$$-2(x-1) < 0 \quad y \quad x-3 < 0$$

$$x-1 > \frac{0}{-2} \quad y \quad x < 3$$

$$x > 1 \quad y \quad x < 3$$

$-\infty$ 1( )3 $+\infty$

$C^+(conjunto\ de\ positividad)$: $(1;3)$

$C^-(conjunto\ de\ negatividad)$: $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$ –Observe que es lo que queda del dominio, sacando el conjunto de positividad-

Nota: Resulta a veces que ambas posibilidades nos dan un conjunto sin solución, o conjunto vacío. Esto significará que, si calculamos el conjunto de positividad y nos devuelve vacío, es porque se trata de una función negativa en “todo su dominio”.

- Los intervalos de crecimiento y decrecimiento será más indicado verlos en el gráfico.
- El valor máximo (o mínimo, según corresponda), dependerá del signo de “a”.

Si “a” es negativo, habrá un valor máximo, y si “a” es positivo, un valor mínimo; el cual será, en cualquier caso: $y = y_v$

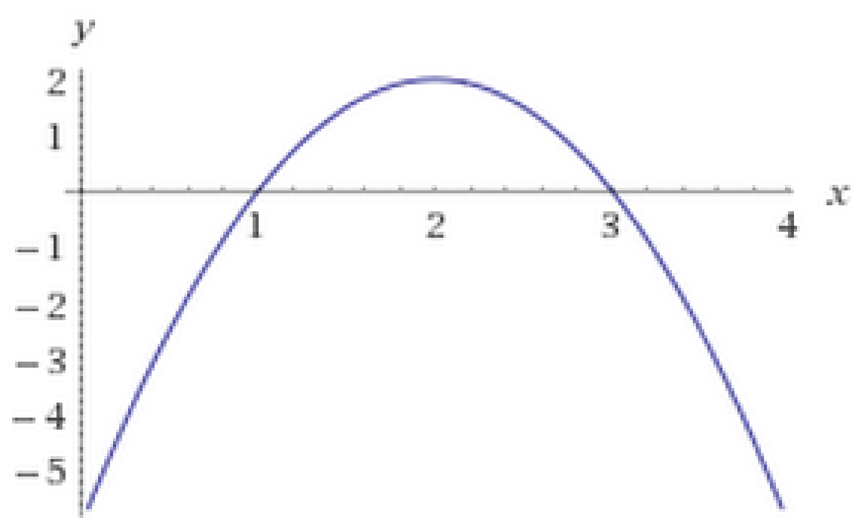
En nuestro ejemplo, $a = -2$, es decir, negativo. Con lo cual, podemos asegurar que obtenemos un valor máximo para la función cuadrática, siendo éste: $y = 2$

Gráfico de una función cuadrática a partir de los datos analizados

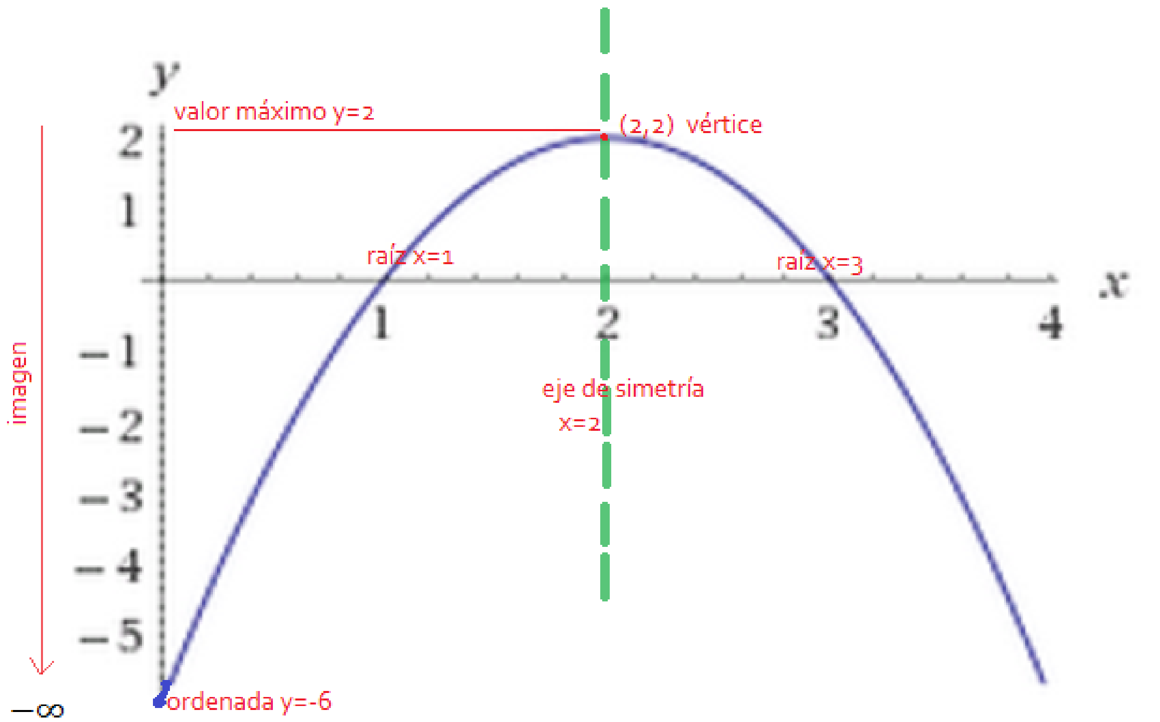
Mostraremos a continuación el gráfico de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$, analizada de acuerdo a la manera más conveniente, para luego llegar al mismo gráfico, pero aplicando *transformaciones cuadráticas*.

Hemos de insistir en que, según la manera en que aparezca la función (forma polinómica, canónica o factorizada), nos será de gran ayuda el que de antemano podamos conocer la forma canónica, ya que nos brinda más información que las otras formas.

$$Gráfica\ de\ f(x) = -2x^2 + 8x - 6$$



Ampliando el gráfico e indicando los aportes de cada dato al mismo:



Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, dependerán del signo de “a”:

$$\text{“}a\text{” negativo} \begin{cases} I_{crec} = (-\infty;\ x_v) \\ \\ I_{dec} = (x_v;\ +\infty) \end{cases} \qquad \text{“}a\text{” positivo} \begin{cases} I_{crec} = (x_v;\ +\infty) \\ \\ I_{dec} = (-\infty;\ x_v) \end{cases}$$

<u>Nota</u>: los intervalos de crecimiento y decrecimiento, siempre se analizan de izquierda a derecha, sobre el eje x respectivamente.

Para la función $f(x) = -2(x-2)^2 + 2$, obtendremos:

$I_{crec} = (-\infty; 2)$ -porque el gráfico va ***creciendo***, hasta $x = 2$-

$I_{dec} = (2;\ +\infty)$ -el gráfico **decrece** de $x = 2$ en adelante-

Transformaciones cuadráticas

A la hora de graficar, es fundamental poder realizar transformaciones simples al gráfico de $f(x) = x^2$ (función cuadrática estándar), de modo de generar la función que deseamos graficar, sólo variando ciertos parámetros, que indicarán paso a paso qué tipo de transformación le estamos realizando a la función inmediatamente graficada.

Ejemplo:

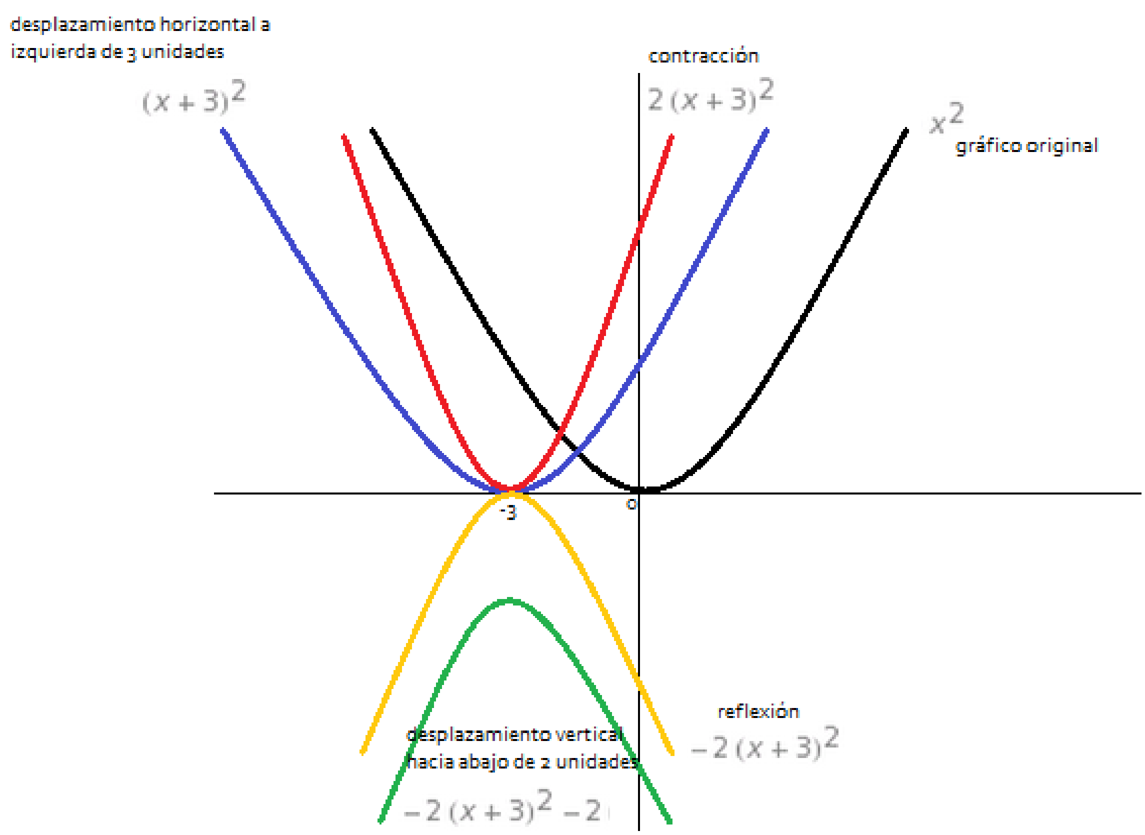
Aplicar ***transformaciones cuadráticas*** a $f(x) = x^2$, indicando éstas en un mismo sistema de coordenadas, para graficar $f(x) = -2(x+3)^2 - 2$

Pasos a realizar:

1) Graficamos la función cuadrática estándar (también la llamaremos **función original**): $f(x) = x^2$
2) Realizamos la transformación cuadrática que me permitirá **mover el gráfico original tres unidades hacia la izquierda**: $f(x) = (x+3)^2$
   La transformación será un desplazamiento horizontal a izquierda de 3 unidades.
3) A la función anterior, la multiplicamos por 2, transformación que recibe el nombre de **"contracción"**: $f(x) = 2(x+3)^2$
4) Agregamos el **signo negativo** delante de todo, parámetro que nos indica una **"reflexión"**: $f(x) = -2(x+3)^2$

5) Por último, el valor que resta al final, será un desplazamiento vertical hacia abajo, de 2 unidades en este caso: $f(x) = -2(x+3)^2 - 2$

Nota: el siguiente gráfico pretende dar una idea de cómo graficar usando transformaciones cuadráticas. Es un gráfico aproximado, incluso las ramas de las parábolas jamás son rectas, hecho que pretende destacar sólo las transformaciones hechas a partir del gráfico original estándar de la función cuadrática.



Función cuadrática original con sus respectivas transformaciones, de modo que cada una de ellas pretenda llegar a un resultado final: la función que deseamos graficar.

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son aquellas cuya forma es la siguiente:

$$f(x) = a^x \quad (forma\ estándar)$$

Con alguna transformación (desplazamientos, reflexiones, contracciones, etc.) de la forma estándar exponencial, podemos determinar de antemano qué forma tendrá el gráfico de $f(x)$.

Supongamos que la base a (mayor que 1) es el valor e (una constante irracional, cuyo valor es aproximadamente 2.71828)

Los gráficos a partir de la función $f(x) = e^x$, de acuerdo al tipo de reflexión que tengan (si es que tienen), se muestran a continuación:

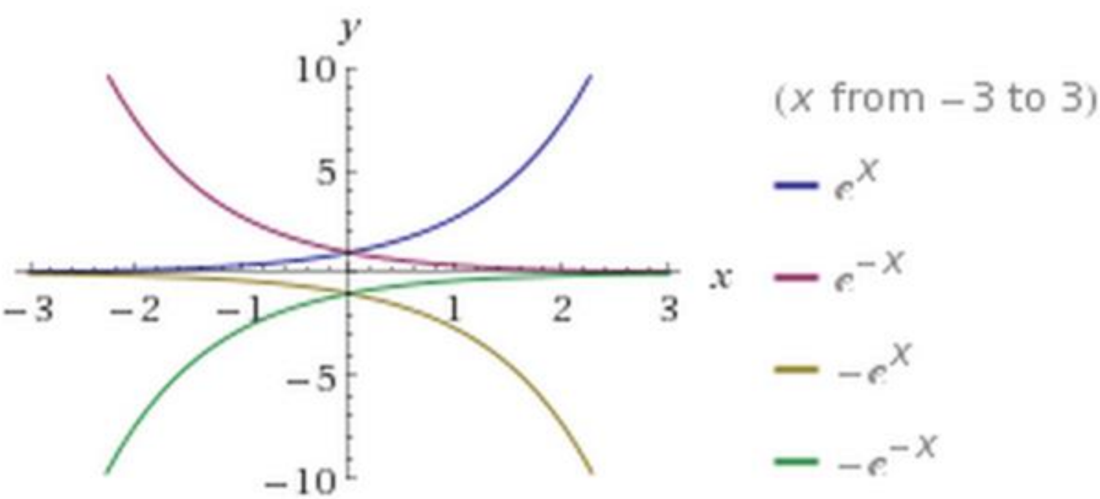


Gráfico de la función exponencial con base "e", y sus reflexiones posibles

Es decir, que si estoy en la misión de hallar el gráfico de $f(x) = -e^{-2x} + 4$, lo que puedo concluir previamente a analizar en detalle la función, es que su gráfico será muy parecido al de la curva exponencial en color verde. ¿Y esto por qué? Pues porque se le hizo una contracción y una traslación vertical al gráfico de $f(x) = -e^{-x}$ $(curva\ exponencial\ en\ verde)$, de modo que sólo se modificó ligeramente tal gráfico, manteniendo su "forma".

Nota: si la base "a" es menor a 1, los gráficos no se corresponden con las reflexiones hechas en el gráfico de arriba, sino que varía, pero se mantienen las **formas**, respectivamente.

Las funciones exponenciales poseen, sin excepción, una característica que se refleja en el gráfico, y es la tendencia a acercarse indefinidamente a una recta horizontal, llamada *"Asíntota Horizontal"*. Tal *asíntota* se determina, a simple vista, observando el valor que está sumando o restando al término exponencial.

Ejemplo:

Asíntota Horizontal $y = 4$

$$f(x) = -e^{-2x} + 4$$

Término exponencial

Las funciones exponenciales tienen su **dominio** en $(-\infty;\ +\infty)$.

La **imagen** es también a simple vista deducible:

$$f(x) = -e^{-2x} + 4$$

Esto es $y = 4$

Signo negativo delante del término exponencial

En resumen, podemos asegurar que la imagen será: $(-\infty; 4)$

¿Y si el signo delante del término exponencial fuera positivo? En ese caso, la imagen nos habría quedado: $(4;\ +\infty)$

Nota: la imagen siempre empieza o termina con algún ∞ en las funciones exponenciales.

Ceros: como el análisis y búsqueda de ceros para cualquier función, comenzamos igualando la función a cero

$$f(x) = -e^{-2x} + 4 = 0$$

Y despejamos x:

$$-e^{-2x} = -4$$

Ahora pasamos el valor -1 que multiplica al término exponencial, dividiendo:

$$e^{-2x} = \frac{-4}{-1}$$

Con lo cual:

$$e^{-2x} = 4$$

Llegado este punto, ¿cómo nos las arreglamos para despejar x, si se encuentra en el exponente?

Debemos aplicar el logaritmo, usando la base que queramos (recordando las limitaciones de bases en logaritmos, desde ya). En este texto, usaremos la base 10, pero podríamos usar cualquier otra mayor a 1.

$$\log(e^{-2x}) = \log(4)$$

De acuerdo a la propiedad de los logaritmos, el exponente "$-2x$" pasa multiplicando delante de todo, quedando la expresión anterior:

$$-2x.\log(e) = \log(4)$$

Ahora, pasamos dividiendo el término que multiplica a $-2x$:

$$-2x = \frac{\log(4)}{\log(e)}$$

Y realizando el cociente anterior, obtenemos aproximadamente:

$$-2x \approx 1.38$$

Por lo tanto:

$x \approx \frac{1.38}{-2} = -0.69$ (Raíz o cero aproximado de $f(x)$ – intersección con eje x)

<u>Conjunto de positividad</u>:

Establecemos la desigualdad positivo respecto a cero, de la función exponencial; es decir

$$f(x) = -e^{-2x} + 4 > 0$$

Y seguimos el "despeje" anterior, pero con cuidado, porque ahora estamos tratando con una desigualdad:

$$-e^{-2x} > -4$$

$$e^{-2x} < \frac{-4}{-1}$$

Al pasar dividiendo un valor negativo, cambia el sentido de la desigualdad

$$e^{-2x} < 4$$

$$\log(e^{-2x}) < \log(4)$$

$$-2x.\log(e) < \log(4)$$

$$-2x < \frac{\log(4)}{\log(e)}$$

$$-2x < 1.38$$

$$x > \frac{1.38}{-2}$$

$$x > -0.69$$

Concluimos que, si el dominio de la función es $(-\infty;\ +\infty)$ y el conjunto de positividad lo determinan los x tales que: $x > -0.69$

Entonces:

$$C^{+} = (-0.69;\ +\infty)$$

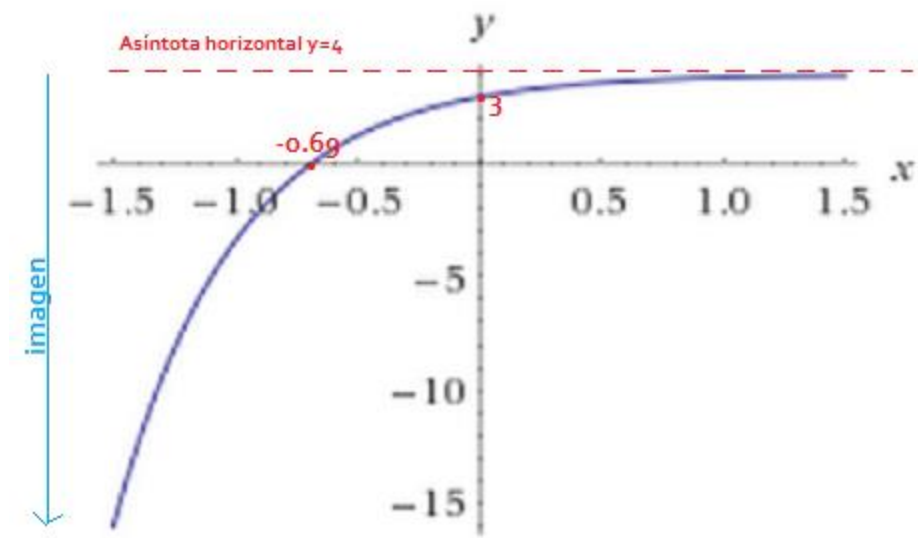
Y, además, por exclusión:

$$C^{-} = (-\infty;\ -0.69)$$

<u>Asíntota Horizontal</u>: $y = 4$

<u>Ordenada</u>: $f(0) = -e^{-2.0} + 4 = -1 + 4 = 3$ (intersección con eje y)

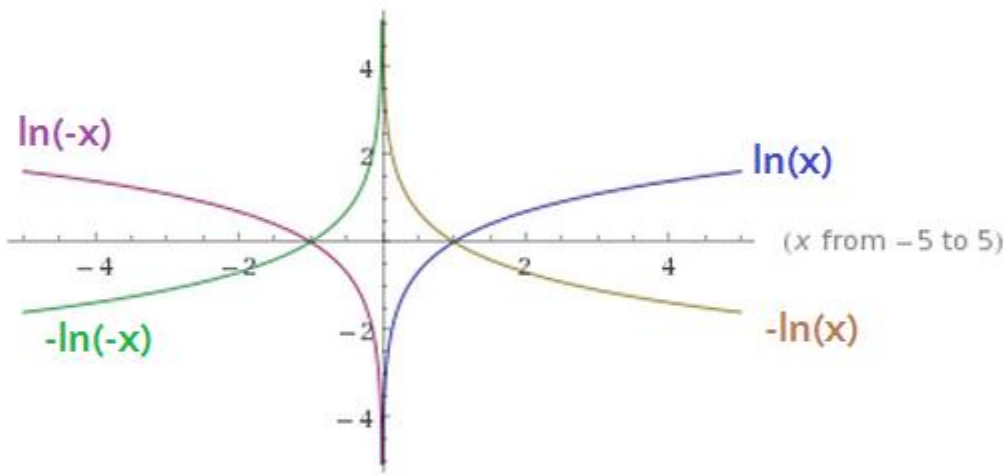
Gráfico de $f(x) = -e^{-2x} + 4$



Funciones logarítmicas

Las funciones logarítmicas, al contrario que las exponenciales, están caracterizadas por mostrar siempre una asíntota vertical, y tienen una familiaridad con las segundas, ya que son funciones inversas entre sí.

Gráficamente, podemos observar las diferentes posibles reflexiones de la función $f(x) = \ln(x)$, según lo indicamos en el sistema cartesiano:



Diferentes reflexiones para la función f(x)=ln(x). Nótese la asíntota vertical, en cada una de ellas, resulta ser x=0.

Para cualquier función logarítmica, y como aclaramos con las funciones exponenciales, los gráficos coloreados de arriba no estarán “orientados” de esa forma si la base del logaritmo es menor a 1 (y mayor a cero, desde ya). Por esa razón, estudiaremos cuando la base sea mayor a 1.

Nota: la función $f(x) = \ln(x)$ es equivalente a $f(x) = log_e(x)$; y recibe el nombre de “***l**ogaritmo **n**atural* -***ln***-”, “logaritmo neperiano” o “logaritmo en base **e**”.

Ejemplo:

Sea $f(x) = -3. log_2(2x + 1) + 6$; hallar

- Dominio, Imagen, ceros (si existen), ordenada al origen, ecuación de la asíntota vertical, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Graficar aproximadamente.

Dominio: Para hallar el dominio de cualquier función logarítmica, establecemos que el **argumento** debe ser **mayor a cero**.

El argumento, en una función logarítmica, es lo que "está entre paréntesis" – informalmente hablando –.

Para nuestro caso, el argumento es:

$$2x + 1 \rightarrow \boxed{\text{Argumento de la función logarítmica a analizar}}$$

Ahora, aplicamos la desigualdad respecto a cero, como lo indicamos anteriormente:

$$2x + 1 > 0$$

Y despejamos x:

$$2x > -1$$

$$x > -\frac{1}{2}$$

Planteamos el intervalo que nos deja la desigualdad anterior. Aquellos valores de x mayores que $-\frac{1}{2}$ representarán el dominio de la función logarítmica. Es decir:

$$Dom\ f(x) = (-\frac{1}{2};\ +\infty)$$

Nota: cuidado al despejar x en una desigualdad, ya que podemos encontrarnos con el problema de pasar dividiendo (o multiplicando) un valor negativo; y con ello la desigualdad se invierte.

Imagen: afortunadamente, la imagen para las funciones logarítmicas es R; es decir, todo el intervalo real.

$$Img\ f(x) = (-\infty;\ +\infty)$$

Ceros: igualamos la función a cero, y despejamos x.

$$f(x) = -3.\,log_2(2x+1) + 6 = 0$$

$$-3.\,log_2(2x+1) = -6$$

$$log_2(2x+1) = \frac{-6}{-3}$$

$$log_2(2x+1) = 2$$

Llegado este paso, la pregunta ahora es: ¿Cómo despejo x si se encuentra en el argumento de la función? O dicho de otra manera, ¿cómo saco el logaritmo de ahí?

Aplicamos el antilogaritmo, una operación que me permite "pasar para el otro lado la base del logaritmo", y de este modo poder despejar la variable x:

$$log_2(2x+1) = 2 \qquad\qquad 2x+1 = 2^2$$

La base del logaritmo pasa como base de una potencia, del otro lado de la ecuación

Logramos despejar el argumento

Despejando x:

$$2x + 1 = 4$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

En consecuencia, el cero o raíz de $f(x)$ es $x = \frac{3}{2}$ (intersección con el eje x).

<u>Ordenada al origen</u>: $f(0) = -3.\, log_2(2.0 + 1) + 6$

$$= -3.\, log_2(1) + 6$$

$$= -3.0 + 6$$

$$= 6$$

Así, la intersección con el eje y se efectuará en $y = 6$.

<u>Ecuación de la asíntota vertical</u>: para hallar la asíntota vertical, igualo el argumento a cero, y despejo x.

$$2x + 1 = 0$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

Efectivamente, $f(x)$ posee una asíntota vertical en $x = -\frac{1}{2}$

<u>Conjunto de positividad</u>: la función debe ser positiva (mayor a cero)

$$f(x) = -3.\,log_2(2x+1) + 6 > 0$$

$$-3.\,log_2(2x+1) > -6$$

$$log_2(2x+1) < \frac{-6}{-3} \quad (cambio\ de\ desigualdad)$$

$$log_2(2x+1) < 2$$

$$2x+1 < 2^2$$

$$2x+1 < 4$$

$$2x < 3$$

$$x < \frac{3}{2}$$

Consecuentemente, el conjunto de positividad será:

$$C^+ = (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$$

¿De dónde apareció el valor $-\frac{1}{2}$? Pues recordemos que el dominio de la función es $(-\frac{1}{2};\ +\infty)$. El dominio de $f(x)$ “arranca” en el valor $-\frac{1}{2}$, sin tocarlo nunca. Así, podemos establecer que, por consiguiente:

$$C^- = (\frac{3}{2};\ +\infty)$$

Al calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, es necesario recordar los gráficos posibles de las reflexiones en funciones logarítmicas.

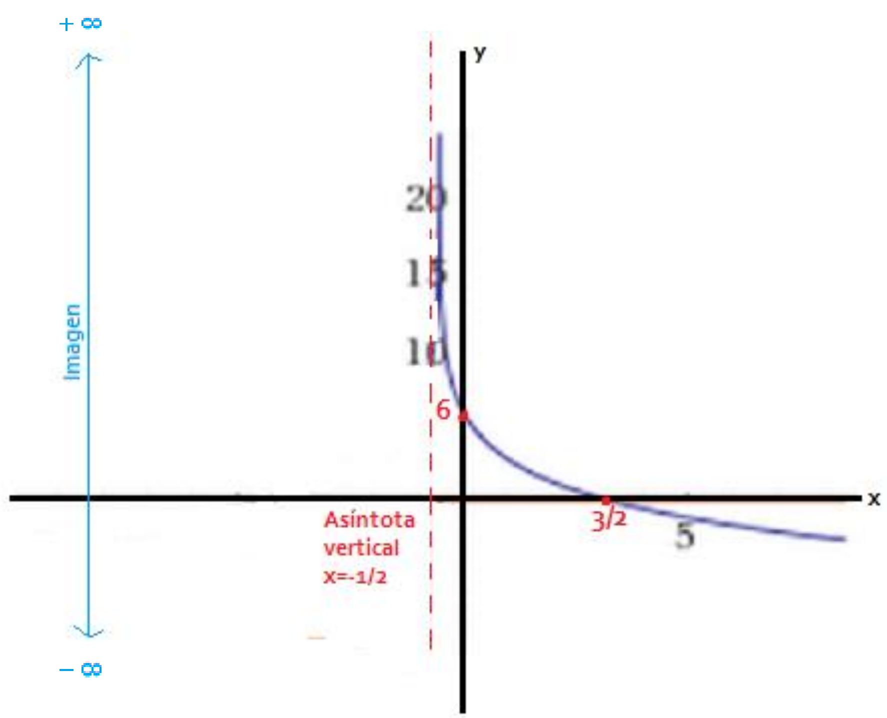
Observemos:

$$f(x) = -3.\,log_2(2x+1)+6$$

Signo negativo delante de todo   signo positivo delante de x

¿Cuál de todas las funciones logarítmicas del gráfico inicial tenía tales características? Pues el gráfico en color marrón, que había sido indicado como $-\ln(x)$.

Finalmente, nos disponemos a graficar, de acuerdo a todos los datos analizados.



Notar que $f(x) = -3.\,log_2(2x+1)+6$ es **decreciente en todo su dominio**.

Entonces, concluimos:

$$I_{crec} = \emptyset \qquad\qquad I_{decrec} = (-\frac{1}{2};\ +\infty)$$