Integración indefinida

La integral indefinida comprende los conceptos de antiderivación y condición de función elemental, para poder entender su alcance.

Integrar y derivar son términos que responden a operaciones inversas entre sí, lo cual nos lleva a afirmar:

- ✓ Integración (o antiderivación) es el proceso inverso de la derivación
- ✓ Integrar una función (integración indefinida) significa hallar $F(x)$ tal que la misma abarque una "familia funcional", cuyas curvas solución difieran sólo en una constante
- ✓ Sólo es posible hallar la integral indefinida (o familia de curvas) de aquellas funciones que presenten las soluciones en términos de funciones elementales. En caso contrario, la integral recibe el nombre de "integral no elemental"
- ✓ Las curvas elementales comprenden todo tipo de composición de funciones tales como: funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc. En mayor o menor medida, la dificultad a la hora de integrar una función resultará en la "forma" que presente la misma, y si un método de resolución es *ajustable* a ella.

Cuando resolvemos una integral indefinida, entonces, estamos hallando un conjunto de funciones (familia de curvas) que, al derivar tal conjunto funcional, volveré a encontrarme con la función que empecé integrando.

Cada una de estas curvas solución se denomina "primitiva".

Consecuentemente, al resolver una integral indefinida estamos buscando una familia de primitivas que representen el conjunto solución.

<u>Integral indefinida: Análisis</u>

El "integrando" es una función cuya primitiva voy a buscar. Es decir, es cierta función original que se derivó y ahora pretendo conocer cuál es esa función original (o primitiva)

El término que acompaña a f'(x) se denomina "diferencial de x", y nos muestra la variable en la cual integro, básicamente

F(x) representa la familia de primitivas o curvas que difieren sólo en una constante. Es decir:

F(x)=f(x)+c

$$\int f'(x)dx = F(x)$$

Veamos un ejemplo concreto de lo detallado anteriormente:

Resolver la integral indefinida:

$$\int 3\,x^2 dx$$

Podemos notar, entonces, que el integrando es $f'(x) = 3x^2$.

Nos preguntamos, ahora ¿Cuál es la función original $f(x)$ tal que su derivada resulta ser la función $f'(x) = 3x^2$?

Solución:

Probemos con la función $f(x) = x^3$. Si derivo tal función, obtendremos, por la regla de las potencias:

$$f'(x) = 3x^2$$

Es decir, que pudimos encontrar la primitiva (solución del problema).

Ahora, sólo escribimos:

F(x): representa la familia de primitivas

$$\int 3x^2dx = \overbrace{x^3 + C}$$

Derivada de alguna función

Función original (o primitiva), que al derivarla me da el "integrando"

Constante real (llamada "constante de integración"), que caracteriza la familia de curvas (o familia de primitivas)

Ilustrando lo anterior, en forma análoga:

Integro

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

Derivo

Nombremos algunas funciones primitivas de $f'(x) = 3x^2$:

- ✓ $f(x) = x^3 + 2$, ya que $f'(x) = 3x^2$
- ✓ $f(x) = x^3 - \pi$, ya que $f'(x) = 3x^2$
- ✓ $f(x) = x^3 + \ln(6)$, ya que $f'(x) = 3x^2$

…

Y así sucesivamente

Observemos que el valor C es siempre un escalar ($C \in R$), una constante, que determina todas y cada una de las primitivas de la familia $F(x)$.

El problema que nos suscita ahora es, ¿puedo siempre a simple vista hallar la primitiva para cualquier función que se halle en el "integrando"?

La respuesta es, lógicamente, no.

Como mencionamos más arriba, depende de la "forma" (el tipo de función que se presente como integrando), que involucra si debo integrar tal función, sea polinómica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, con raíces, o alguna expresión racional, etc.

Así como hay varias reglas de derivación que nos permiten hallar la derivada de una determinada función, también vamos a concebir reglas (y métodos) que nos permitan encontrar primitivas.

Reglas de integración

Regla de las potencias:

$$\boxed{\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C}$$

Ejemplo:

Resolver lo siguiente

$$\int x^4 \, dx$$

Solución:

Como la "forma" del integrando se ajusta a la regla de las potencias, podemos concluir que

$$\int x^4 \, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C$$

$$= \frac{x^5}{5} + C$$

Conforme vamos avanzando con las reglas de integración, nos encontraremos con ciertas restricciones a la hora de aplicar tales reglas. Observemos lo siguiente:

Resolver:

$$\int x^{-1} \, dx$$

Solución:

Como la “forma” del integrando se ajusta a la regla de las potencias, obtenemos

$$\int x^{-1}\,dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C$$

$$= \frac{x^{0}}{0} + C$$

Llegamos a un resultado absurdo.

Esto es así, porque la potencia $n = -1$ está prohibida (y es la única con restricción) en la regla de las potencias.

Sin ir más lejos, notemos lo siguiente:

Integro

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \;\ldots + C$$

Derivo

¿Reconoce el lector la relación anterior?

Si derivo cierta función, me devuelve $f'(x) = \frac{1}{x}$

Revisando las reglas de derivación, obtenemos:

$$f(x) = \ln(x)$$

En consecuencia, la solución es:

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$$

Nota: debido a que el dominio de la función $f(x) = \ln(x)$ es $(0; +\infty)$, suele escribirse la solución anterior como

$$= \ln|x| + C$$

Considerando que, si x es negativo, sólo nos quedemos con su módulo.

Más adelante se remarcará la importancia de este detalle.

Regla del logaritmo natural:

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}$$

Regla de la exponencial:

$$\boxed{\int e^{x}\,dx = e^{x} + C}$$

Reglas de algunas funciones trigonométricas:

$$\boxed{\int sen(x)\,dx = -\cos(x) + C}$$

$$\boxed{\int \cos(x)\,dx = sen(x) + C}$$

$$\boxed{\int sec^2(x)dx = tg(x) + C}$$

Regla de la constante:

$\forall\ k \in R;$

$$\boxed{\int k\ \ dx = k.x + C}$$

Recordemos en esta regla que:

$$\int \underbrace{e^{-\sqrt[5]{8}}.(\ln(4) + \pi)}_{\boxed{\text{Constante k}}}\,dx = \underbrace{e^{-\sqrt[5]{8}}.(\ln(4) + \pi)}_{\boxed{\text{Constante k}}}.x + C$$

Integración directa

Cuando utilizamos el método de integración directa, básicamente estamos haciendo uso de las propiedades algebraicas, reacomodando los términos y luego dándole una "forma" a la función, de modo que me permita aplicar las reglas de integración que vimos.

Ejemplo:

Calcular

$$\int \frac{-3x^2 + \sqrt{x} - 4}{x^3}\, dx$$

Notemos que hay una raíz en el integrando (reescribir como potencia fraccionaria), y también vemos sumas y restas en el numerador, de modo que podemos hacer una distributiva del denominador para cada término. A saber:

$$\int \frac{-3x^2 + \sqrt{x} - 4}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{-3x^2}{x^3} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3} - \frac{4}{x^3} \right) dx$$

$$= \int \left(-3x^{2-3} + x^{\frac{1}{2}-3} - 4. x^{-3} \right) dx$$

$$= \int \left(-3x^{-1} + x^{-\frac{5}{2}} - 4. x^{-3} \right) dx$$

Ahora, distribuimos la integral para cada término (esto es una propiedad, integro término a término, como cuando hacíamos la derivada de una suma o resta de términos)

$$= \int -3x^{-1}\,dx + \int x^{-\frac{5}{2}}\,dx - \int 4\,x^{-3}\,dx$$

Llegado este punto, aplicamos otra propiedad en integración: "sacar las constantes afuera de la integral"

$$= -3\int x^{-1}\,dx + \int x^{-\frac{5}{2}}\,dx - 4\int x^{-3}\,dx$$

Por último, como cada integrando tiene una "forma" a la que podemos aplicarle una regla ya conocida, integramos:

Regla del logaritmo natural

Regla de las potencias

Regla de las potencias

$$= -3.\ln|x| + \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} - 4.\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$

Reescribimos un poco cada término, para que quede más simplificada la expresión:

$$= -3.\ln|x| + \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-{}^{3}\!/_{2}} - 4.\frac{x^{-2}}{-2} + C$$

$$= -3.\ln|x| - \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-2} + C \qquad ; C \in R$$

<u>Ejercicios</u>

Intentá lo siguiente. Cada uno de los ejercicios a continuación se resuelve aplicando primero propiedades algebraicas para reacomodar los términos, y luego utilizando algunas de las reglas vistas hasta ahora. Es decir, son integrales que se resuelven por integración directa. Las soluciones están anexadas, para que corrobores tu trabajo.

1) $\int \left(2x^2 - \sqrt[3]{x} + 4e^x\right)dx$

2) $\int \frac{x^{-5} + \sqrt{x}.\sqrt[4]{x} + 5\sqrt[3]{x}}{x^{-4}}\,dx$

3) $\int 2x^{-2}\left(\sqrt{x} - 2x + 1\right)dx$

4) $\int \frac{5e^{3x}}{e^{2x}}\,dx$

5) $\int \frac{4 - 2x^2 - 3x}{\sqrt[5]{x}.\sqrt[3]{x}}\,dx$

6) $\int \frac{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}{3x}\,dx$

7) $\int \frac{4}{x}(2 + 3x^{-1} - x.sen(x))dx$

8) $\int -e^{-x}(4e^x + e^{2x})dx$

ANEXO – SOLUCIONES A EJERCICIOS DE INTEGRACIÓN DIRECTA

1) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4e^x + C \qquad ; C \in R$

2) $\ln|x| + \frac{4}{23}x^{\frac{23}{4}} + \frac{15}{16}x^{\frac{16}{3}} + C$

3) $-4x^{-\frac{1}{2}} - 4.\ln|x| - \frac{2}{x} + C$

4) $5e^x + C$

5) $\frac{60}{7}x^{-\frac{8}{15}} - \frac{30}{37}x^{\frac{37}{15}} - \frac{191}{330}x^{\frac{22}{15}} + C$

6) $\frac{2}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{3}x + C$

7) $8.\ln|x| - \frac{12}{x} + 4.\cos(x) + C$

8) $-4x - e^x + C$

Integración por sustitución

El método de integración por sustitución representa una útil manera de hallar primitivas cuando trabajo con funciones compuestas, que no pueden resolverse, desde ya, utilizando la técnica de reacomodamiento algebraico y posterior aplicación de reglas de integración que caracterizan a la integración directa.

Cualquiera de las integrales siguientes puede resolverse utilizando el método de sustitución:

1) $\int \frac{-3x^2}{5x^3+7}\,dx$

2) $\int 2x^3 . e^{-x^4+6}\,dx$

3) $\int 4x^2 . \sqrt[5]{6-x^3}\,dx$

4) $\int -x^5 . sen(2x^6+1)\,dx$

5) $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

6) $\int \cos(x) . (3sen(x)+1)^4\,dx$

7) $\int \frac{2}{x}(1+\ln(x))dx$

8) $\int -5x^{\frac{1}{2}} . (2+3x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}}\,dx$

9) $\int \frac{sen(x)}{\cos(x)}\,dx$

10) $\int e^{3x} . (e^x-1)dx$

11) $\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

12) $\int x . \sqrt{x+2}\,dx$

Una pauta para determinar si el integrando presenta una “forma” donde pueda aplicarse sustitución, es observar si aparecen funciones potencias de x; ya sea en un producto o un cociente, o también, incluso, un exponente.

Dicho esto, es importante remarcar que cada forma potencial encontrada en el integrando debe cumplir las siguientes características:

- La potencia de la expresión en la composición, debe superar en una y sólo una unidad a la expresión potencial que aparece fuera de la composición
- El término potencial en la composición debe constar máximo de dos monomios: uno es el término potencial en sí, y el otro es una constante

Procederemos ahora a resolver una integral de las nombradas más arriba, para dar cuenta de las *características condicionales* del integrando, y comprender el método de sustitución en sí.

Resolver la integral:

$$\int 4x^2 . \sqrt[5]{6 - x^3}\ dx$$

Antes que nada, observemos que en el integrando hay un producto de dos expresiones. Una de esas expresiones es la forma potencial $4x^2$, y la otra es la expresión potencial en una composición $(6 - x^3)^{\frac{1}{5}}$.

Ahora bien, recuerde que siempre conviene reescribir las raíces como potencias fraccionarias, de modo de evitar problemas al integrar más adelante, en el ajuste a alguna regla de integración, respectivamente.

Análisis del integrando en el método de sustitución

Potencia cuadrada de x, aparece fuera de la composición

Potencia cúbica de x, aparece en una composición. Hay dos monomios, uno es la potencia cúbica, y el otro una constante

$$\int 4x^2 . \sqrt[5]{6 - x^3}\ dx$$

Notemos que las potencias de cada forma potencial que aparece son 2 y 3, respectivamente. A saber:

- $4x^2$ es una forma potencial, de potencia 2
- $6 - x^3$ es una forma potencial, de potencia 3

Y detallar que **las potencias difieren sólo en una unidad** (de 2 a 3 hay una unidad)

Cumplidos los requisitos para resolver la integral por el método de sustitución, hacemos:

Sea $u = 6 - x^3$ (siempre se llama "u" -la letra puede ser cualquiera- a la forma potencial que está en la composición)

Derivamos la expresión anterior, en ambos lados, con lo cual quedará:

$$\frac{du}{dx} = -3x^2$$

<u>Nota</u>: al derivar u, se escribe la expresión $\frac{du}{dx}$, que equivale a "la derivada de u respecto de x". Es la expresión equivalente $u' = \frac{du}{dx}$.

Ahora, despejamos dx de la expresión anterior:

$$du = -3x^2 . dx$$

$$\frac{du}{-3x^2} = dx$$

Haremos una pausa en este punto, para saber qué obtuvimos hasta ahora:

$$u = 6 - x^3 \qquad ; \qquad dx = \frac{du}{-3x^2}$$

Puesto que, para cada ejercicio donde deba aplicar el método de sustitución, debo encontrar "u" y "dx", volvamos a la integral a resolver:

$$\int 4x^2.\sqrt[5]{6-x^3}\ dx = \int 4x^2.(6-x^3)^{\frac{1}{5}}\ dx$$

Y sabiendo que $u = 6 - x^3$; $dx = \frac{du}{-3x^2}$, sustituimos en la integral:

$$\int 4x^2.(6-x^3)^{\frac{1}{5}}\ dx = \int 4x^2.u^{\frac{1}{5}}.\frac{du}{-3x^2}$$

$$= \int 4.u^{\frac{1}{5}}.\frac{du}{-3} \qquad (se\ cancelaron\ los\ x^2)$$

$$= -\frac{4}{3}\int u^{\frac{1}{5}}\ du \qquad (saco\ las\ constantes\ afuera)$$

Y en este momento, procedo a integrar con la regla de las potencias, ya que se "ajusta" al integrando:

$$= -\frac{4}{3}.\frac{u^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C$$

$$= -\frac{4}{3}.\frac{u^{\frac{6}{5}}}{6/5} + C \qquad ;reescribo$$

$$= -\frac{10}{9}.u^{\frac{6}{5}} + C \qquad ;hicimos\ \frac{-4/3}{6/5}$$

$$= -\frac{10}{9}(6-x^3)^{\frac{6}{5}} + C \qquad ;reemplacé\ "u"$$

Donde C es la constante o valor real que denota la familia de primitivas.

Sin ir más lejos, los pasos para aplicar sustitución son siempre los mismos, razón por la cual debemos reconocer las características de un integrando que me permitan resolver tal integral por este método.

Dicho sea de paso, no es la única pauta en la cual se encuentra un integrando para resolver con sustitución.

El siguiente ejemplo nos proporciona una manera de darnos cuenta cuando también es posible aplicar sustitución, sin necesidad de encontrar formas potenciales en funciones compuestas:

<u>Ejemplo</u>:

Resolver la integral

$$\int \cos(x)\,.\,(3sen(x)+1)^4\ dx$$

Observemos que, si hacemos $u = 3sen(x) + 1$, obtenemos:

$$\frac{du}{dx} = 3\cos(x)$$

Con lo cual, al despejar dx:

$$dx = \frac{du}{3\cos(x)}$$

Y al sustituir:

$$\int \cos(x)\,.\,(3sen(x)+1)^4\ dx = \int \cos(x)\,.\,u^4 . \frac{du}{3\cos(x)}$$

$$= \int u^4.\frac{du}{3} \qquad ; cancelé\ los\ \cos(x)$$

$$= \frac{1}{3}\int u^4\, du$$

Integrando:

$$= \frac{1}{3}.\frac{u^{4+1}}{4+1} + C$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{u^5}{5} + C$$

$$= \frac{1}{15}u^5 + C$$

Y reemplazando $u = 3sen(x) + 1$, finalmente obtenemos:

$$= \frac{1}{15}(3sen(x) + 1)^5 + C$$

Si observamos con detenimiento los primeros pasos, pudimos concluir que, teniendo una función dentro de una composición cuya derivada me devuelve alguna variante de la función que está “afuera” de tal composición, efectivamente los términos en "x" se cancelan entre sí, dejando una expresión en el integrando sólo con "u", que es lo que se pretende en este método de resolución.

Detalles del análisis anterior:

La función de "afuera" de la composición es cos(x), que luego se cancela con 3cos(x), en este ejercicio

La función dentro de la composición es 3sen(x)+1, y su derivada es 3cos(x), una variante de la función que está afuera: cos(x), de modo de luego poder cancelarse entre sí. Por este motivo, llamamos "u" a la función que está "dentro" de la composición.

$$\int \cos(x) . (3sen(x) + 1)^4 \ dx$$

Recuerde, entonces; si mediante reacomodo algebraico del integrando no puede aplicar integración directa, pase a preguntarse si es posible aplicar el método de sustitución. Las pautas para ello son, entre otras:

- Formas potenciales en funciones compuestas
- Funciones dentro de una composición cuyas derivadas son variantes de la función que está afuera de tal composición

Si al cabo del análisis anterior del integrando, no ve ajustable ni el método de integración directa, ni sustitución, entonces es posible que nos encontremos ante una integral resoluble por el **método de integración por partes**.

Integración por partes:

El método de integración por partes es aplicable en aquellos casos donde, básicamente, no podemos utilizar integración directa, ni sustitución, y el integrando presenta un producto combinado de funciones: polinómicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, funciones inversas.

Este potente método está definido por una fórmula, expresión que determina cuáles parámetros debemos buscar a la hora de resolver una integral por el método de partes.

Fórmula de integración por partes:

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

Ahora, ¿a qué se refiere tal fórmula? Pues la integral que aparece a la izquierda de la ecuación, es aquella que pretendo resolver; mientras que lo de la derecha conforma parte del resultado final.

La integral que vemos a la derecha, es una integral "más simple" que el problema original, a menos que nos encontremos en una integración cíclica por partes, problema que veremos más adelante.

Nota: la integral de la derecha, al ser más simple que el problema original, puede que nos quede para resolver de forma directa o por sustitución.

Ejemplo:

Resolver la integral

$$\int x.e^x \, dx$$

Observemos, primeramente, que no es posible aplicar integración directa, ya que tenemos un producto entre x y e^x, de modo que no podemos distribuir la integral (lo que sí sucedía con sumas y/o restas), ni tampoco utilizar sustitución, ya que no tenemos formas potenciales compuestas ni otra pauta que nos lleve a utilizar sustitución.

El método de integración por partes nos aporta la solución.

Como el integrando está formado por un producto entre una función polinómica; es decir: x; y una función exponencial; a saber: e^x, podemos recurrir a la fórmula de integración por partes para establecer lo siguiente:

$$\int \underset{x}{u}.\underset{e^x dx}{dv} = u.v - \int v.du$$

Con lo cual, tenemos:

$$\boxed{u = x \qquad ; \qquad dv = e^x dx}$$

En este momento debemos hacer una pausa, como es habitual, para preguntarnos lo siguiente:

Si ya tenemos "u" y "dv", ¿qué parámetros son los que debemos buscar?

Bien, los parámetros a buscar, son los que aparecen a la derecha de la fórmula, que no poseemos; es decir: "v" y "du".

¿Cómo encontrar los parámetros "v" y "du"? Lo detallaremos a continuación.

Lo que llamé "u", lo derivo y luego despejo "du"

$$\underbrace{u = x}$$

Derivo y despejo "du":

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

Lo que llamé "dv" lo integro, y el resultado es "v"

$$\underbrace{dv = e^x dx}$$

Integro y encuentro "v":

$$\int dv = \int e^x \, dx$$

$$v = e^x$$

Podemos observar, entonces, que los parámetros que tengo son, en concreto:

$$u = x \qquad ; \qquad v = e^x \qquad ; \qquad du = dx$$

Volvamos al problema original, y planteamos la fórmula de integración por partes, conjuntamente con los datos encontrados para resolver tal integral:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int x.e^x\,dx = x.e^x - \int e^x\,dx$$

Y, finalmente, nos quedó que:

$$\underbrace{\int x.e^x\,dx}_{\text{Integral original}} = \underbrace{x.e^x - \int e^x\,dx}_{\text{Resultado que me quedó aplicando la fórmula de integración por partes, y reemplazando los parámetros encontrados}} = \underbrace{x.e^x - e^x + C}_{\text{Resultado final}} \qquad ;C \in R$$

Una pregunta, llegado este punto, es:

¿Siempre llamaré "u" al primer factor que aparezca en el producto del integrando, y "dv" al segundo factor? ¿O llamaré a cualquiera de los factores, al azar, y obtendremos lo mismo con la aplicación del método de integración por partes?

La respuesta es negativa en ambos casos.

Hay una regla, en integración por partes, para la cual determinamos correctamente la asignación del parámetro "u" para una función, y "dv" para la otra, respectivamente.

Regla ILPET

La regla ILPET denota, con sus siglas, los tipos de funciones que aparecen como factores en el integrando cuya primitiva buscamos, mediante el método de integración por partes.

Tales siglas significan: Inversa, Logarítmica, Polinómica, Exponencial, Trigonométrica.

Y es así, en ese orden.

Esto significa que, si en el producto que aparece como integrando, tengo una función Polinómica, y otra Logarítmica, tomaré como "u" a la función Logarítmica, ya que se encuentra "antes" que la Polinómica, en las siglas ILPET:

I.L.P.E.T

La función logarítmica precede a la polinómica, por eso llamamos "u" a tal función logarítmica

En este caso, la función polinómica tendrá la asignación de "dv"

Ejemplo:

Resolver la integral

$$\int x^3 . \ln(x)\, dx$$

Vista la regla ILPET, y al reconocer que en el integrando tenemos el producto de una función polinómica: x^3 y otra logarítmica: $\ln(x)$, procedemos a hacer:

$$u = \ln(x) \qquad ; \qquad dv = x^3 dx$$

De modo que, a partir de ahí, la integral anterior se resuelve siguiendo los mismos pasos que los detallados más arriba.

Ejercicios

Intentá lo siguiente. Cualquiera de las integrales a continuación es resoluble con el método de integración por partes. Las soluciones a tales ejercicios están anexadas, para que corrobores tu trabajo.

1) $\int x^2 . \ln(x)\, dx$

2) $\int x . \cos(x)\, dx$

3) $\int x . e^{2x}\, dx$

4) $\int x^2 . e^x\, dx$

5) $\int x^2 . sen(x) dx$

6) $\int x^{-2} . (x + x^4 . \ln(x)) dx$

ANEXO – SOLUCIONES A EJERCICIOS DE INTEGRACIÓN POR PARTES

1) $\frac{x^3}{3}.\ln|x| - \frac{1}{9}x^3 + C \qquad ; C \in R$

2) $x.sen(x) + \cos(x) + C$

3) $\frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$

4) $x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + C$

5) $-x^2.\cos(x) + 2x.sen(x) + 2\cos(x) + C$

6) $\ln|x| + \frac{1}{3}x^3.\ln|x| - \frac{1}{9}x^3 + C$

Nota: es posible que, al aplicar la fórmula de integración por partes, la integral que obtengas del lado derecho (lo que llamamos "integral más simple que el problema original"), tengas que resolverla aplicando el método de partes nuevamente.

Incluso, la integral que forma parte del resultado, puede ser tan *compleja* como la del *problema original*, como sucede en el caso de una integral cíclica.

Integración cíclica:

Frecuentemente, este tipo de problemas al integrar surgen en integrandos expresados como productos entre funciones exponenciales y trigonométricas, pudiendo haber otros casos, desde ya.

Ejemplo:

Resolver la integral

$$\int e^{x}.sen(x)\,dx$$

Solución:

Como el integrando presenta un producto entre la función exponencial e^{x} y la función trigonométrica $sen(x)$, aplicaremos integración por partes; la cual, según la regla ILPET, nos lleva a decidir que:

$$u = e^{x} \qquad ; \qquad dv = sen(x)dx$$

Entonces:

$$\frac{du}{dx} = e^{x} \qquad\qquad \int dv = \int sen(x)dx$$

$$du = e^{x}dx \qquad\qquad v = -\cos(x)$$

Los parámetros hallados para aplicar la fórmula de integración por partes son:

$$u = e^x \quad ; \quad v = -\cos(x) \quad ; \quad du = e^x dx$$

Consecuentemente:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

$$\int \underbrace{e^x}_{u}.\underbrace{sen(x)dx}_{dv} = \underbrace{e^x}_{u}.\underbrace{(-\cos(x))}_{v} - \int \underbrace{(-\cos(x))}_{v}.\underbrace{e^x\,dx}_{du}$$

Reescribiendo un poco, para "acomodar" los signos, obtendremos:

$$\int e^x.sen(x)dx = -e^x.\cos(x) + \int e^x.\cos(x)\,dx$$

Note que, la integral del lado derecho de la ecuación, es nuevamente resoluble por partes, y tan compleja como la integral original. Procedemos a efectuar, en un cálculo auxiliar, integración por partes para esta nueva integral.

Cálculo auxiliar para resolver:

$$\int e^x.\cos(x)\,dx$$

Tomamos $u = e^x$ y $dv = \cos(x)dx$; con lo cual:

$$\frac{du}{dx} = e^x \qquad ; \qquad \int dv = \int \cos(x)\,dx$$

$$du = e^x.dx \qquad ; \qquad v = sen(x)$$

Y aplicamos la fórmula de partes:

$$\int e^x.\cos(x)\,dx = \underbrace{e^x.sen(x) - \int e^x.sen(x)dx}_{\text{Este es el resultado del cálculo auxiliar}}$$

Una vez obtenido el anterior resultado, salimos del cálculo auxiliar, y volvemos al problema original. Recordemos:

$$\int e^x.sen(x)dx = -e^x.\cos(x) + \int e^x.\cos(x)\,dx$$

Ahora, como tenemos una expresión equivalente para la integral de la derecha, reemplazamos:

$$\int e^x.sen(x)dx = -e^x.\cos(x) + e^x.sen(x) - \int e^x.sen(x)dx$$

Si observamos un poco, las integrales a ambos lados de la ecuación, son idénticas, excepto por el signo.

La manera de continuar con el problema, no estriba en intentar nuevamente realizar la “integración” en el lado derecho de la ecuación, porque volveríamos a resultados similares, una y otra vez.

El hecho que hayamos vuelto a la integral del problema original, es el motivo por lo cual este tipo de expresiones recibe el nombre de “integral cíclica”.

Procedemos a “juntar” ambas integrales del lado izquierdo de la ecuación, de modo que nos quedaría:

$$\int e^x.sen(x)dx + \int e^x.sen(x)dx = -e^x.\cos(x) + e^x.sen(x)$$

$$2\int e^x.sen(x)dx = -\,e^x.\cos(x) + e^x.sen(x)$$

Finalmente, “despejamos la integral del problema original”:

$$\int e^x.sen(x)dx = \frac{-e^x.\cos(x) + e^x.sen(x)}{2} + C \qquad ; C \in R$$

Integración por fracciones simples:

El método de integración por fracciones simples es, fundamentalmente, una técnica de reacomodo algebraico eficiente para el posterior proceso de integración (no se trata de un método de integración en sí, como sí lo son los métodos de sustitución e integración por partes, donde durante el proceso empleábamos derivación y búsqueda de diferenciales).

Aquellos integrandos cuya expresión sea de la forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \qquad ; p(x)\ y\ q(x)\ son\ polinomios$$

Resultarán de mucho interés para su análisis mediante la conversión de tal cociente a fracciones simples.

Una fracción simple es un cociente irreducible (que no puede escribirse como sumas y/o restas de otros cocientes); y, además, el grado del polinomio numerador es menor que el grado del polinomio denominador, de modo que tampoco es posible efectuar una "división larga" para encontrar una forma fraccionaria más simplificada.

Así, por ejemplo, el cociente:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}$$

Presenta una expresión susceptible de ser reescrita en forma de fracciones simples.

La pregunta es: ¿Cómo convertir un cociente de polinomios en dos o más fracciones irreducibles (fracciones simples), para expresar el integrando de un modo que deje claro qué regla y/o método de integración aplicar, a fines de hallar un conjunto de primitivas que definan la solución al problema?

Veamos lo siguiente:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}$$

Hemos factorizado el denominador, con lo cual observamos la descomposición de éste en dos factores lineales (con raíces distintas entre sí. A saber; $x=3$ y $x=2$).

Cada uno de esos factores lineales del denominador, determinará una fracción simple, que escribiremos de la siguiente manera:

$$\frac{2x+1}{x^2-5x+6}=\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}=\underbrace{\frac{A}{x-3}}_{\boxed{\text{Fracción simple}}}+\underbrace{\frac{B}{x-2}}_{\boxed{\text{Fracción simple}}}$$

Notemos que, si nos fue posible factorizar el denominador y encontrar raíces distintas; consecuentemente, por cada factor lineal que nos quede (en este caso hay dos factores lineales, pero podría haber tres o más aún), corresponde una fracción simple de la forma:

$$\frac{constante}{factor\ lineal}$$

Los factores lineales, para el caso del ejemplo, son:

$$x-3 \qquad y \qquad x-2$$

Y las constantes del numerador, las llamaremos A y B.

El problema central en la técnica de fracciones simples es, además de poder reescribir el cociente inicial (el integrando que caracteriza el problema a resolver); poder conocer también cuánto valen las constantes del numerador (para este caso, qué valores son A y B).

Proceredemos de la manera siguiente:

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$2x+1 = \frac{A}{x-3}.(x-3)(x-2) + \frac{B}{x-2}.(x-3)(x-2)$$

El denominador (x-3)(x-2) pasó multiplicando a cada fracción simple

Al pasar multiplicando el denominador a cada fracción simple, notemos que se simplifican ciertos factores, y nos queda:

$$2x+1 = A.(x-2) + B.(x-3)$$

Llegado este punto, nos centraremos directamente en hallar los valores de A y B.

Para ello, tomamos valores concretos para reemplazar en x, que me permitan eliminar una constante, supongamos, B; y despejar así A.

Si tomamos $x = 3$, la ecuación anterior será:

$$2(3) + 1 = \quad A.(3 - 2) \quad + \quad B.(3 - 3)$$

$$7 = A.1 + B.0$$

$$A = 7$$

Con lo cual, obtuvimos el valor de A.

Efectuamos ahora el mismo proceso, pero reemplazando en la ecuación por $x = 2$, para eliminar A y despejar B.

Si tomamos $x = 2$, la ecuación queda:

$$2(2) + 1 = \quad A.(2 - 2) \quad + \quad B.(2 - 3)$$

$$5 = A.0 + B.(-1)$$

$$5 = -B$$

$$B = -5$$

Ahora que conocemos los valores de las constantes A y B, volvamos a la expresión original, que involucraba el cociente a reescribir como fracciones simples:

$$\frac{2x + 1}{(x - 3)(x - 2)} = \quad \frac{A}{x - 3} \quad + \quad \frac{B}{x - 2}$$

Y reemplazamos las constantes con los valores hallados:

$$\frac{2x+1}{(x-3)(x-2)} = \frac{7}{x-3} + \frac{-5}{x-2}$$

Finalmente, hemos llegado a escribir el cociente de polinomios del lado izquierdo de la ecuación, como la suma de fracciones simples del lado derecho de la ecuación.

¿Cómo llevar este proceso de reescritura que hicimos, para emplearlo en la resolución de una integral?

<u>Ejemplo</u>:

Resolver la integral:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$$

<u>Solución</u>:

Como podemos reescribir el integrando de otra forma, factorizando y luego generando fracciones simples, obtendremos

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx \underset{\text{Equivale a}}{=} \int \frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}\,dx \underset{\text{Equivale a}}{=} \int \left(\frac{7}{x-3} + \frac{-5}{x-2}\right) dx$$

Con lo cual, el problema se redujo a integrar lo siguiente:

$$\int \left(\frac{7}{x-3} \; + \; \frac{-5}{x-2} \right) dx$$

Aplicamos propiedades, distribuyendo la integral y luego sacando las constantes afuera:

$$\int \frac{7}{x-3}\, dx \; + \; \int \frac{-5}{x-2}\, dx$$

$$7 \int \frac{1}{x-3}\, dx \; - \; 5 \int \frac{1}{x-2}\, dx$$

Por último, aplicando una sustitución en cada integral (por separado), obtendremos la solución:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\, dx = 7.\ln|x-3| - 5.\ln|x-2| + C \qquad ; C \in R$$

<u>Nota</u>: cuando debas resolver integrales por la técnica de fracciones simples, recordá primero hacer la conversión del integrando a tales fracciones simples (con A y B o las constantes que haya, resueltas) en un cálculo auxiliar, y completado ese paso, finalmente, expresá la integral original como el equivalente a la integral de la suma de esas fracciones simples encontradas. El método de integración, luego, varía.

Casos especiales: raíces múltiples y factores cuadráticos irreducibles

A la hora de resolver una integral por la técnica de fracciones simples, debo tener en cuenta la multiplicidad de las raíces presentes en el denominador.

El caso de reescritura en fracciones simples para raíces con multiplicidad uno (raíces diferentes entre sí), quedó plasmado en el análisis que involucró al ejercicio anterior.

Así, cabe preguntarnos qué sucederá si la integral a resolver presenta una forma como la siguiente:

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)}\,dx$$

Notemos que, en el denominador, $x = 1$ es una raíz de multiplicidad 3 (raíz múltiple), puesto que el factor lineal $(x-1)$ aparece elevado a tal potencia. Y, además, $x = -2$ es raíz de multiplicidad 1 (raíz simple), mismo motivo.

La reescritura en fracciones simples sería:

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^3(x+2)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x+2}\right)\,dx$$

El factor lineal (x-1) comienza con potencia 1, y llega hasta la potencia 3 (multiplicidad de la raíz x=1)

Caso simple

Otro ejemplo:

$$\int \frac{5x+2}{x^3-x^2}\,dx = \int \frac{5x+2}{x^2(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}\right)dx$$

La raíz x=0 tiene multiplicidad 2

La escritura en fracciones simples para la raíz de multiplicidad 2 x=0, cuyo factor lineal correspondiente es: x-0 (equivalente a x).

Caso simple

<u>Factores cuadráticos irreducibles</u>

Note que, en cualquiera de los casos anteriores (raíces simples y múltiples), la reescritura en fracciones simples denotaba que cada fracción simple tenía como numerador una constante (A, B, C, D, ..., etc.).

Cuando el integrando presenta un denominador con un factor cuadrático irreducible (aquel factor cuadrático que no tiene raíces reales), procederemos a reescribir del siguiente modo:

<u>Ejemplo</u>:

Reescribir como suma de fracciones simples

$$\int \frac{1-3x}{x^3+x}\,dx$$

Solución:

El numerador ya no es una constante. Es una “forma lineal”

$$\int \frac{1-3x}{x^3+x}\,dx = \int \frac{1-3x}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{\overbrace{Bx+C}}{x^2+1}\right)dx$$

Raíz x=0, multiplicidad 1

Factor cuadrático irreducible: no tiene raíces reales

Caso simple

Factor cuadrático irreducible

Caso general: factores cuadráticos irreducibles “múltiples”

Ejemplo:

$$\int \frac{3x+5}{(x-2)(x^2+4)^3}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-2} + \frac{\overbrace{Bx+C}^{\text{Forma lineal}}}{x^2+4} + \frac{\overbrace{Dx+E}^{\text{Forma lineal}}}{(x^2+4)^2} + \frac{\overbrace{Fx+G}^{\text{Forma lineal}}}{(x^2+4)^3}\right)dx$$

Raíz simple x=2

Factor cuadrático irreducible: la multiplicidad que presentan las raíces complejas es 3

Caso simple

La potencia del factor cuadrático irreducible va desde 1 hasta 3: la multiplicidad de las raíces complejas. Observe que es igual al caso de raíces reales múltiples.

Tabla de Integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad ; n \neq -1$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad ; a > 0; a \neq 1$$

$$\int k.\,dx = k.\,x + C \qquad ; k \in R$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x) + tg(x)| + C$$

$$\int sen(x)dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

$$\int \cos(x)\,dx = sen(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}.\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int sec^2(x)dx = tg(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}dx = \frac{1}{a}.\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}dx = \frac{1}{a}.\,arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$$