La derivada

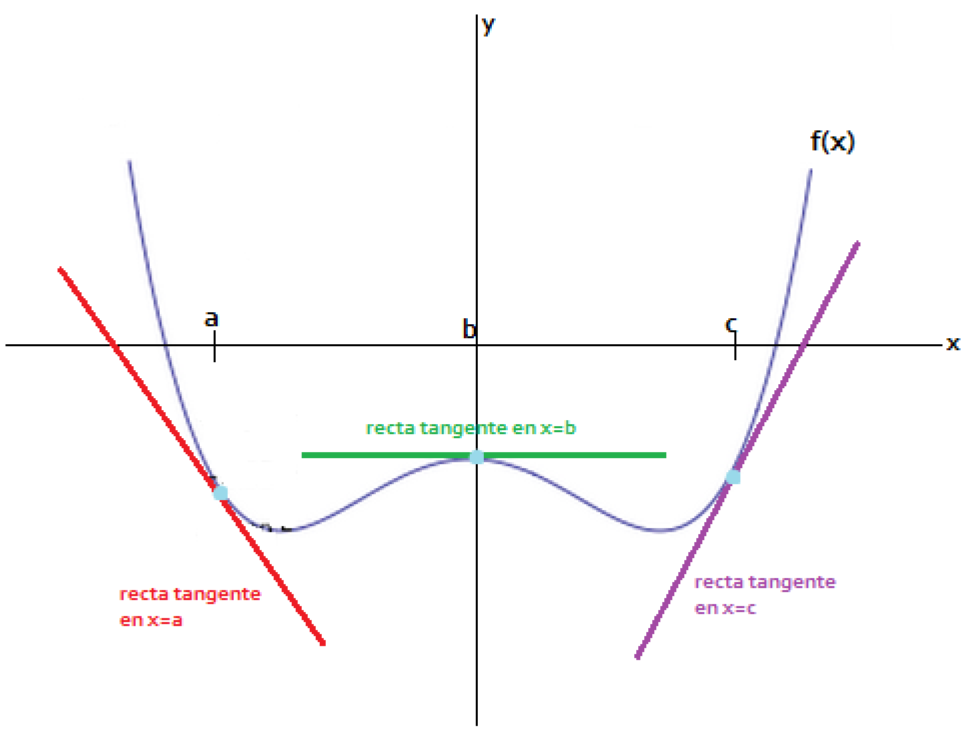
El término *"derivada"* hace referencia, esencialmente, a la **pendiente de la recta tangente** a una función determinada, en cualquier punto $x = a$, suponiendo que $f(x)$ es continua y derivable en tal punto.

Dicho esto, es necesario aclarar que no siempre existe la derivada en un punto donde una función es continua. De hecho, una función puede ser continua en $x = a$, pero no derivable en tal punto. También, y en el peor de los casos, puede que directamente $f(a)$ no exista, cualquiera fuere el tipo de discontinuidad que presentase, y así imposibilitar la existencia de la derivada en ese punto.

Dos premisas condicionales a tener en cuenta:

1. Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$
2. Si $f(x)$ no es continua en $x = a$, entonces $f(x)$ no es derivable en $x = a$

Aclaremos conceptos gráficamente:



Podemos observar detenidamente las pendientes de las rectas tangentes en cada punto.

Pendiente de recta tangente a $f(x)$ en $x = a$: negativa

Pendiente de recta tangente a $f(x)$ en $x = b$: cero

Pendiente de recta tangente a $f(x)$ en $x = c$: positiva

Esto significa, en un principio, que:

- ✓ La derivada de $f(x)$ en $x = a$ es negativa
- ✓ La derivada de $f(x)$ en $x = b$ es nula
- ✓ La derivada de $f(x)$ en $x = c$ es positiva

El concepto de *derivada* es bastante amplio, aunque en este texto nos limitemos a hallar el valor de una derivada en un punto, y de este modo sugerir que el término "derivada" puede referirse a una función como las que venimos estudiando, o cualquier otro tipo de función susceptibles de ser evaluadas en algún punto.

Y esto es así, porque necesariamente una derivada (llamémosla $f'(x)$, según la notación convencional) es una función, que brinda información sobre la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en un punto $x = c$ o todo un intervalo $(a; b)$, en el cual el punto $x = c$ esté contenido.

Nuevamente, recurramos a un ejemplo gráfico:

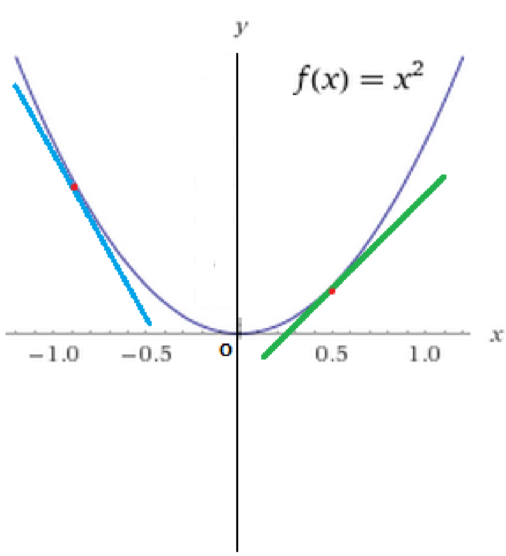


Gráfico de la función original

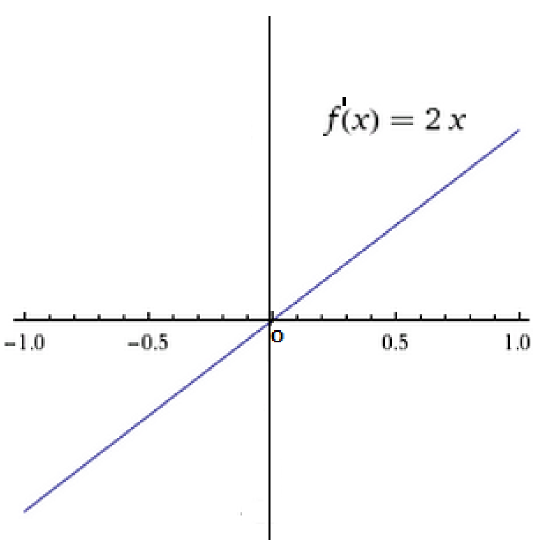


Gráfico de la función original derivada

Observemos el gráfico de la función $f(x) = x^2$, y estudiemos cómo es la derivada para cualquier punto, en los intervalos siguientes:

Podemos asegurar que:

- ✓ Para todo $x \in (-\infty; 0)$, la **derivada** es **negativa** (porque la pendiente de cualquier recta tangente en estos puntos es negativa)
- ✓ Para todo $x \in (0; +\infty)$, la **derivada** es **positiva** (porque la pendiente de cualquier recta tangente en estos puntos es positiva)

Ahora, es el momento de analizar la *función derivada*: $f'(x) = 2x$

Como tenemos la función original ($f(x) = x^2$) habiéndose derivado ($f'(x) = 2x$), no hará falta analizar pendientes de rectas tangentes, sino solamente el comportamiento de la función derivada, en los intervalos anteriores.

¿Y esto qué significa? Pues que podemos analizar directamente el comportamiento de la función derivada para determinar en qué intervalos la función original (es decir, sin derivar) presenta rectas tangentes con pendientes negativas o positivas.

Veamos:

- ✓ En el intervalo $(-\infty; 0)$ la función $f'(x) = 2x$ es negativa (es decir, la derivada de $f(x)$ es negativa en tal intervalo), porque el gráfico de $f'(x)$ está por debajo del eje x en $(-\infty; 0)$.
- ✓ En el intervalo $(0; +\infty)$ la función $f'(x) = 2x$ es positiva (es decir, la derivada de $f(x)$ es positiva en tal intervalo), porque el gráfico de $f'(x)$ está por encima del eje x en $(0; +\infty)$.

Podemos en este momento establecer lo importante que resulta calcular una derivada en un punto, o directamente generalizar y encontrar una función derivada para cierta función original $f(x)$, de modo de encontrar en qué intervalos la función presenta rectas tangentes con pendiente positivas o negativas.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

- Cuando una función $f(x)$ presenta su correspondiente función derivada $f'(x)$, que es negativa en un intervalo $(a; b)$, decimos que $f(x)$ es decreciente en ese intervalo.
- Cuando una función $f(x)$ presenta su correspondiente función derivada $f'(x)$, que es positiva en un intervalo $(a; b)$, decimos que $f(x)$ es creciente en ese intervalo.

En el ejemplo práctico anterior, podemos establecer, según lo dicho anteriormente:

- $f(x) = x^2$ es decreciente en $(-\infty; 0)$, porque su derivada es negativa en ese intervalo.
- $f(x) = x^2$ es creciente en $(0;\ +\infty)$, porque su derivada es positiva en ese intervalo.

Llegado este punto, lo importante es preguntarnos ¿Cómo hice para calcular la derivada de una función? Es decir: ¿comienzo con una función y obtengo otra, porque sí?

Aclaremos que acá comienza el drástico camino de hallar derivadas de múltiples funciones. Pero no hay que preocuparse mucho, ya que varias funciones tienen reglas "sencillas" para hallar su derivada.

Antes de adentrarnos en las llamadas **reglas de derivación**, encontraremos derivadas mediante la definición; esto es, utilizando un límite para su cálculo.

Derivada por definición

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

A veces, podemos encontrar también la forma equivalente:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Veamos un ejemplo concreto:

Hallar la derivada de $f(x) = x^2$, utilizando la definición.

Primero, notemos que en la fórmula de la definición, aparece el término siguiente:

$$f(x+h)$$

¿Qué significa tal expresión? Pues reemplazar en la función original, donde dice x, por $x + h$.

Entonces:

Ésta es la función original, reemplazado x por x+h

Ésta es la función original

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \qquad ; aplicamos\ binomio\ cuadrado$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \qquad ; sacamos\ los\ paréntesis$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \qquad ; simplificamos\ términos$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h} \qquad ; factor\ común\ "h"$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) \qquad ; simplificamos\ las\ "h"$$

Y ahora evaluamos el límite:

Este punto es importante, ya que debemos notar que dentro del paréntesis, hay términos que tienen "x", y términos que tienen "h". Los términos que tengan "h", se hacen cero (porque $h \to 0$). Lo que no tenga "h", queda como está; con lo cual:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

En consecuencia:

La derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$

Reglas de derivación

Regla de las potencias:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = a.x^n, \text{ entonces } \quad f'(x) = a.nx^{n-1}}$$

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = -5x^3$, con un término potencia de x, su derivada será:

$$f'(x) = -5.3x^{3-1} = -15x^2$$

Aplicable es lo anterior si hay sumas y/o restas de términos potencias de x, a saber:

Si $f(x) = -2x^4 + 6x^{\frac{5}{3}} - 3x^2$, su derivada resultará ser:

$$f'(x) = -2.4x^{4-1} + 6.\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - 3.2x^{2-1}$$

Aplicamos la regla a cada término

$$= -8x^3 + 10x^{\frac{2}{3}} - 6x$$

Nota: una manera sencilla de realizar lo anterior es, para cada término que tenga potencia de x, recordar la frase *"bajar el exponente multiplicando, y restarle un 1"*.

Con esto, observemos lo rápido que se efectúa el cálculo de la derivada:

$$Sea\ f(x) = 4x^{-\frac{5}{2}}, entonces\ hacemos\ f'(x) = 4.\left(\frac{-5}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}-1} = -10x^{-\frac{7}{2}}$$

Bajo la potencia　　　le resto un 1

Antes de pasar a otra regla, recordemos lo siguiente:

Si uno de los términos contiene una raíz de cualquier índice para x, podemos entonces reescribir esa raíz como una potencia fraccionaria.

Ejemplo:

Sea $f(x) = -2\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[7]{x}$; hallar su derivada.

Podemos ver que la función contiene términos con raíces, el índice en cada una de ellas es 3 y 7, respectivamente. Procedemos a expresar tales raíces como potencias fraccionarias, según lo indicamos:

$$f(x) = -2x^{\frac{1}{3}} + 4x^{\frac{1}{7}}$$

Con lo cual, ahora sí podemos encontrar su derivada, aplicando la regla de las potencias:

$$f'(x) = -2.\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} + 4.\left(\frac{1}{7}\right)x^{\frac{1}{7}-1} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{7}x^{-\frac{6}{7}}$$

Regla de la exponencial:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = e^x\text{, entonces } f'(x) = e^x}$$

Nota: lo anterior es válido siempre y cuando la base de la exponencial sea el número "e". Si tuviéramos que derivar una función exponencial con otra base, el resultado sería diferente.

Regla de la constante:

Sea k un escalar –un valor constante- ($k \in R$);

$$\boxed{\text{Si } f(x) = k, \text{ entonces } f'(x) = 0}$$

Ejemplo:

Para $f(x) = -\frac{5}{3}$; hallar su derivada.

Solución:

Como $f(x)$ es una constante (es un valor real), entonces su derivada es cero. Es decir, $f'(x) = 0$.

Es importante hacer una pausa en este punto, ya que lo que se considera un valor constante, puede no parecerlo a simple vista, como se puede apreciar en los problemas siguientes.

Problema 1:

Hallar la derivada de $f(x) = -3\sqrt[4]{(2 + e^{\pi})}$

Solución:

Como $f(x)$ es una constante, su derivada es cero. Es decir, $f'(x) = 0$.

¿Y cómo aseguro que lo anterior es un valor constante? A simple vista, cuando no veamos ninguna "x" en el término, entonces se trata de un término constante. Por esto, concluimos que la expresión anterior es un escalar, un número real, una constante. También, es necesario aclarar que dicha expresión la podemos introducir en la calculadora, y nos arrojará un valor más o menos como:

$$\approx -6.7176$$

Ese valor es la constante, es el valor "k" al que está igualada la función, con la condición de que no podemos ver a simple vista que se trata de un valor real, sino que se nos ocurre cualquier otra cosa.

Así, pudimos concluir que, aplicando la regla de la constante, su derivada fue cero.

Problema 2:

Hallar la derivada de $f(x) = sen(-2\ln(4) + \pi) - e^{-\cos(\frac{\pi}{2})}$

Solución:

Como $f(x)$ es una constante, su derivada es cero.

Notemos nuevamente que en toda la expresión funcional, no hay ningún "x", de modo que establecemos la igualdad $f(x) = k$, y con ello concluimos $f'(x) = 0$.

Problema 3:

Hallar la derivada de $f(x) = -4e^2 + 3x^4 - \sqrt{7}$

Solución:

En la expresión anterior, hay dos términos constantes, a saber:

$$-4e^2 \quad \text{y} \quad -\sqrt{7}$$

Ahora, al derivar $f(x)$, se procede a derivar término a término, respetando siempre que en cada término se aplique la regla de derivación correspondiente, para asegurar que se está realizando una operación de derivación “legal”, consecuentemente.

Así, obtendremos:

$$f'(x) = 0 + 3.4x^{4-1} + 0 = 12x^3$$

Regla del producto:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones reales derivables en un intervalo abierto I, definimos la derivada del producto entre f y g como:

$$\boxed{[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $h(x) = 2x^3.e^x$

Solución:

Notemos que $h(x)$ se define como un producto de dos funciones, las cuales llamaremos $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente; a saber:

$$f(x) = 2x^3 \quad \text{y} \quad g(x) = e^x$$

Con lo cual, siguiendo la regla del producto, obtenemos:

$$h'(x) = [f(x).g(x)]' = \underbrace{6x^2}_{f'(x)}.\underbrace{e^x}_{g(x)} + \underbrace{2x^3}_{f(x)}.\underbrace{e^x}_{g'(x)}$$

Nota: considere utilizar la propiedad de mantener los coeficientes y derivar los términos en x, a considerar los coeficientes como funciones “aparte”. Si bien el resultado final es el mismo, podremos ahorrar considerable cantidad de pasos y bastante esfuerzo. Con el próximo ejemplo pretendemos ilustrar tal situación.

Supongamos que deseamos derivar la función $f(x) = 4.x^6$, la cual nos mostraría, utilizando la regla del producto, que:

$$f'(x) = 0.x^6 + 4.6x^5$$

Derivada del primero

Primero sin derivar

Segundo sin derivar

Derivada del segundo

$$= 24x^5$$

Cuando de modo más rápido, podemos "mantener el coeficiente 4" delante de la potencia de x, y derivar el término x^6. Es decir, que siempre que sea posible utilizar las propiedades, evitemos tener que considerar utilizar reglas más complejas.

<u>Regla del cociente:</u>

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones reales derivables en un intervalo abierto I, definimos la derivada del cociente entre f y g como:

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la derivada de la función $h(x) = \frac{-5\sqrt[3]{x}+6e^x}{4x^3-2x^2+1}$

Antes que nada, reescribimos cualquier tipo de raíz que aparezca en la expresión, como una potencia fraccionaria:

$$h(x) = \frac{-5\sqrt[3]{x} + 6e^{x}}{4x^{3} - 2x^{2} + 1}$$

$$= \frac{-5x^{\frac{1}{3}} + 6e^{x}}{4x^{3} - 2x^{2} + 1}$$

Ahora, llamemos $f(x)$ a la función que está en el numerador, y $g(x)$ la función del denominador, respectivamente. Nos disponemos a efectuar la regla del cociente para hallar $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{\overbrace{\left(-\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 6e^{x}\right)}^{f'(x)}\overbrace{(4x^{3} - 2x^{2} + 1)}^{g(x)} - \overbrace{\left(-5x^{\frac{1}{3}} + 6e^{x}\right)}^{f(x)}\overbrace{(12x^{2} - 4x)}^{g'(x)}}{(4x^{3} - 2x^{2} + 1)^{2}}$$

Donde el denominador es $[g(x)]^{2}$.

Regla del logaritmo natural:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = \ln(x), \text{ entonces } f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Reglas de algunas funciones trigonométricas:

Si $f(x) = sen(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$
Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -sen(x)$
Si $f(x) = tg(x)$, entonces $f'(x) = sec^2(x)$

Regla de la cadena (para funciones compuestas):

La regla de la cadena, también llamada "regla general de las potencias", es útil cuando se presentan funciones compuestas, de modo de apreciar la regla cuando tengo una función definida de la forma siguiente:

Si $f(x) = [g(x)]^n$, entonces $f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$

Notar que en este primer término, se utilizó una derivación como nos indicaba la regla de las potencias.

La función g(x) se conserva como estaba.

La derivada de la función g(x) convierte a la regla de la cadena en una regla general de las potencias

Ejemplo:

Hallar la derivada de la función $f(x) = (sen(x) + \ln(x))^5$

Solución:

Como podemos apreciar, la "forma" que presenta la función $f(x)$ parece ajustarse a la regla de la cadena, al momento de encontrar su derivada.

De manera informal, digamos que "lo que está dentro del paréntesis grande", será la función $g(x)$. Es como si intentáramos hallar la derivada de:

$$f(x) = [g(x)]^5$$

Donde $g(x) = sen(x) + \ln(x)$.

Ahora, apliquemos la regla de la cadena a $f(x)$:

$$f'(x) = 5.[g(x)]^4.g'(x)$$

Es decir, que la derivada será:

$$f'(x) = 5.[sen(x) + \ln(x)]^4.(\cos(x) + \frac{1}{x})$$

g(x) quedó como estaba, dentro de la potencia cuarta

g'(x) multiplica para completar la regla de la cadena

La regla de la cadena permite utilizar su potencial definiendo nuevas reglas de derivación, aplicables a funciones compuestas. Esto significa que, más allá de encontrar o no la forma $f(x) = [g(x)]^n$ para alguna función $f(x)$, estaremos aplicando regla de la cadena, de manera transparente a tal regla. Nos explicaremos más detalladamente a continuación.

Regla de la cadena para funciones trascendentes compuestas: reglas generales de derivación

Las funciones trascendentes involucran a aquellas tales como $f(x) = sen(x); \quad g(x) = \cos(x)\,; \quad h(x) = \ln(x)\,; \quad m(x) = e^x$, y algunas variantes de éstas, en mayor o menor medida.

Ahora bien, si cualquiera de estas funciones presenta una composición determinada, sea cual fuere, el esquema de derivación seguirá una regla de la cadena que llamaremos “regla general”, para diferenciarla de la regla “simple” o predefinida, que vimos anteriormente en cada una de las funciones trascendentes mencionadas arriba.

Ejemplo:

Sea $f(x) = sen(x) + 5.\ln(x)$, hallar $f'(x)$.

Solución:

Como contamos con las reglas “simples” y bien conocidas para la función anterior, no tenemos más que aplicar, término a término, la regla correspondiente; con lo cual obtendremos:

$$f'(x) = \cos(x) + 5.\frac{1}{x} = \cos(x) + \frac{5}{x}$$

Pero ¿Qué pasaría si ahora realizamos una mínima composición, y lo anterior lo llevamos al problema siguiente?

Problema 1:

Hallar la derivada de $f(x) = sen(x^4 + 5) + \ln(x)$

Solución:

Aún no contamos con una regla para determinar la derivada de la función compuesta $sen(x^4 + 5)$, con lo cual debemos definir las reglas generales. Nos ocuparemos de cinco reglas generales (nos ayudarán lo necesario y suficiente), todas ellas muy útiles al buscar derivadas de funciones compuestas que involucren funciones trascendentes. Veamos:

Regla general para la función compuesta $f(x) = sen[g(x)]$

Si la función trascendente $sen(x)$ ya no tiene como argumento sólo a x, sino que tiene "dentro del paréntesis" a cualquier función, la cual llamamos $g(x)$, convenimos:

$$\boxed{\text{Si } f(x) = sen[g(x)], \text{ entonces } f'(x) = \cos[g(x)] \, . \, g'(x)}$$

Ejemplo:

Retornamos al problema anterior, que había quedado sin resolver. Buscaremos la derivada de $f(x) = sen(x^4 + 5) + \ln(x)$.

Observemos que el argumento de la función seno, es $x^4 + 5$. De este modo, la función seno está compuesta por $g(x) = x^4 + 5$.

Sin ir más lejos, podemos escribir, entonces, lo siguiente:

$$f(x) = sen[g(x)] + \ln(x)$$

Y procedemos a derivar, de acuerdo a la definición de la regla general para el seno compuesto:

$$f'(x) = \cos[g(x)]\,.\,g'(x) + \frac{1}{x}$$

$$= \cos(x^4 + 5)\,.\,4x^3 + \frac{1}{x}$$

Regla general para la función compuesta exponencial $f(x) = e^{g(x)}$

Si la función exponencial presenta una composición respecto a su exponente, decimos:

Si $f(x) = e^{g(x)}$, entonces su derivada es $f'(x) = e^{g(x)}.\,g'(x)$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $f(x) = e^{-3x^4 + sen(x) - \pi^3}$

Solución:

Notemos que $g(x) = -3x^4 + sen(x) - \pi^3$, luego:

$$f'(x) = \overbrace{e^{-3x^4 + sen(x) - \pi^3}}^{e^{g(x)}}\,.\,\overbrace{(-12x^3 + \cos(x))}^{g'(x)}$$

Regla general para la función compuesta $f(x) = \cos[g(x)]$

$$\boxed{\text{Si } f(x) = \cos[g(x)], \text{ entonces su derivada es } f'(x) = -sen[g(x)].\,g'(x)}$$

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la derivada de $f(x) = 3.\cos(sen(x) + \ln(x)) + \sqrt[4]{x}$

Solución:

Notemos que $g(x) = sen(x) + \ln(x)$, que al reescribir nos queda:

$$f(x) = 3.\cos[g(x)] + x^{\frac{1}{4}}$$

Con lo cual, derivando lo anterior, obtenemos:

$$f'(x) = 3.-sen[g(x)].\,g'(x) + \frac{1}{4}.x^{-\frac{3}{4}}$$

$$= -3sen[sen(x) + \ln(x)].\left(\cos(x) + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}.x^{-\frac{3}{4}}$$

Regla general de la función compuesta $f(x) = \ln[g(x)]$

$$\boxed{\text{Si } f(x) = \ln[g(x)], \text{ entonces su derivada es } f'(x) = \frac{1}{g(x)} . g'(x)}$$

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la derivada de $f(x) = \ln\left(e^x + 3sen(x) - \sqrt{2}\right) + \cos(x)$

Identifiquemos $g(x) = e^x + 3sen(x) - \sqrt{2}$, luego:

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} . g'(x) - sen(x)$$

$$= \frac{1}{e^x + 3sen(x) - \sqrt{2}} . (e^x + 3\cos(x)) - sen(x)$$

<u>Nota</u>: a veces directamente la derivada de la función logarítmica compuesta la vemos como su equivalente $f'(x) = \frac{g\prime(x)}{g(x)}$; ya que $\frac{1}{g(x)} . g'(x)$ resulta ser la misma expresión.

Regla general para la función compuesta $f(x) = tg[g(x)]$

> Si $f(x) = tg[g(x)]$, entonces su derivada es $f'(x) = sec^2[g(x)].g'(x)$

<u>Ejemplo</u>:

Hallar la derivada de $f(x) = tg\left(x^3 + \sqrt[5]{x}\right) - \ln(sen(x))$

Solución:

Notemos que $g(x) = x^3 + \sqrt[5]{x}$, procedemos a reescribir

$$f(x) = tg[g(x)] - \ln(sen(x))$$

Y derivamos:

$$f'(x) = \overbrace{sec^2\left(x^3 + \sqrt[5]{x}\right)}^{sec^2[g(x)]}.\overbrace{\left(3x^2 + \frac{1}{5}.x^{-\frac{4}{5}}\right)}^{g'(x)} - \overbrace{\frac{1}{sen(x)}.\cos(x)}^{\text{Esta es la derivada del logaritmo compuesto}}$$

Métodos de derivación

En ciertos casos, donde la función a derivar tiene una expresión la cual resulta imposible aplicar directamente cualquiera de las reglas vistas hasta el momento, será recomendable conocer dos métodos recurrentes para tal fin. Tales métodos son: **derivación logarítmica** y **derivación implícita**.

Derivación logarítmica:

Este método de derivación es sumamente útil cuando la función a derivar presenta la forma:

$$f(x) = [g(x)]^{h(x)}$$

Es decir; tanto en la base como en el exponente, hallamos alguna función de x.

Algunos ejemplos para $f(x)$ son:

$a)$ $f(x) = (sen(x))^x$

$b)$ $f(x) = x^{3x}$

$c)$ $f(x) = (\ln(x))^{sen(x)}$

$d)$ $f(x) = (1 + \cos(x))^{-2x}$

$e)$ $f(x) = (3 - 2x^2)^{\ln(x)}$

$f)$ $f(x) = \left(e^x + \frac{1}{x}\right)^x$

Problema:

Hallar la derivada de:

$$f(x) = (3-2x^2)^{\ln(x)}$$

Solución:

Como hay una función de x en el exponente, aplicamos el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación, de modo práctico, para “bajar” tal exponente multiplicando (recordemos que se trata de una propiedad del logaritmo)

$$\ln[f(x)] = \ln[(3-2x^2)^{\ln(x)}]$$

$$\ln[f(x)] = \ln(x)\,.\ln(3-2x^2)$$

Notar que el exponente: ln(x), bajó multiplicando

Llegado el paso anterior; es decir, cuando bajé el exponente, es la condición para que, a partir de ahí, pueda derivar ambos lados de la ecuación (en el término de la izquierda tengo un logaritmo compuesto, y en el término de la derecha un producto; con lo cual aplico las reglas de derivación del logaritmo compuesto y del producto, respectivamente):

$$\frac{1}{f(x)}.f'(x) = \frac{1}{x}.\overbrace{\ln(3-2x^2)}^{\text{Segundo sin derivar}} + \ln(x).\overbrace{\frac{1}{3-2x^2}(-4x)}^{\text{Segundo derivado}}$$

Derivada del logaritmo compuesto

Derivada del primero

Primero sin derivar

Como el objetivo es encontrar $f'(x)$, la despejo del término de la izquierda de la ecuación, de modo que paso $f(x)$ multiplicando al resultado de la derecha:

$$f'(x) = f(x).\left(\frac{1}{x}.\ln(3-2x^2) + \ln(x).\frac{1}{3-2x^2}(-4x)\right)$$

Y, como paso final, reemplazamos $f(x)$ por la función original del ejercicio, a saber:

$$f'(x) = (3-2x^2)^{\ln(x)}.\left(\frac{1}{x}.\ln(3-2x^2) + \ln(x).\frac{1}{3-2x^2}(-4x)\right)$$

<u>Nota</u>: probablemente, para el problema de hallar la derivada de la función

$f(x) = (sen(x))^x + \cos(x)$, nos convenga realizarla término a término; de modo de aplicar derivación logarítmica para el primer término, y la regla simple para el segundo término, pero en cálculos auxiliares aparte.

Es decir, expresamos inicialmente:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

De modo que:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Recordando:

$$g(x) = (sen(x))^x \qquad ; \qquad h(x) = \cos(x)$$

Derivación implícita:

El método de derivación implícita es una aplicación de la regla de la cadena como la que conocemos, y útil cuando la función $f(x)$ (cuya derivada queremos encontrar), no aparece despejada explícitamente en función de x.

Algunos ejemplos son:

$a)\quad 2x^2.y^4 + e^y - 4 = sen(x) + y^2$

$b)\quad y^2 + y^3 + \ln(x) = \cos(y)$

$c)\quad sen(x.y) = 3x^4.y$

$d)\quad \ln(y) + x.y = y^3$

Para cualquiera de estas ecuaciones, la función está "expresada" de forma implícita, ya que:

$$y = f(x)$$

Y tal función no está "despejada en términos de x", sino que aparece bajo alguna potencia, o en productos, incluso dentro de argumentos; ya sea de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.

Ejemplo:

Hallar $f'(x)$ (equivale a y'):

$$y^2 + y^3 + \ln(x) = \cos(y)$$

Recordar que "y" es una función compuesta (una función de x, no sabemos cuál). De este modo, cada vez que derivamos un término con "y", debemos aplicar la regla general de derivación que le corresponda a tal término.

Comenzamos derivando término a término:

$$2y.y' + 3y^2.y' + \frac{1}{x} = -sen(y).y'$$

Regla general de las potencias

Regla general de las potencias

Regla del logaritmo natural

Regla del coseno compuesto

Ahora, como el objetivo es despejar y', debo "juntar" todos los términos con y' de un lado de la ecuación, y los que no tengan y', del otro lado.

Obtendríamos lo siguiente:

$$2y.y' + 3y^2.y' + sen(y).y' = -\frac{1}{x}$$

El próximo paso es sacar factor común y' (ya que aparece multiplicando a cada término en la izquierda de la ecuación):

$$y'.\left(2y+3y^2+sen(y)\right)=-\frac{1}{x}$$

Finalmente, despejamos y', de modo que el factor que lo está multiplicando, pasará dividiendo al lado derecho de la ecuación:

$$y'=\frac{-\frac{1}{x}}{2y+3y^2+sen(y)}$$

Otra forma de escribirse la ecuación anterior, es:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{2f(x)+3[f(x)]^2+sen[f(x)]}$$

Nota: cuando la expresión funcional anterior la evalúo en un punto $P(a,f(a))$, decimos que "hallamos la derivada de $f(x)$ en $x=a$"; es decir, estamos calculando la derivada en un punto.

Derivada en un punto:

La búsqueda de una expresión para $f'(x)$ puede efectuarse aplicando reglas predeterminadas sobre $f(x)$, teniendo en cuenta su "forma"; o bien, utilizando la definición (es decir, empleando el límite). Como hemos afirmado en un principio, la condición de función continua en $x = a$ es requisito necesario (pero no suficiente) para asegurar que $f(x)$ es derivable en tal punto.

Así, podemos establecer que:

- Derivar $f(x)$ y evaluarla en el punto $x = a$, será el paso posterior a la confirmación de la continuidad de $f(x)$ en ese punto.
- Si determinamos, en principio, que $f(x)$ no es continua en $x = a$, tampoco será derivable en él.
- Calcular la derivada en un punto $x = a$ (si $f(x)$ es continua en él), comprende el análisis del comportamiento de las llamadas "derivadas laterales", que intentan ser un procedimiento equivalente a determinar la existencia del límite en un punto tal.

Definición de derivada en un punto:

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Ejemplo:

Determinar si $f(x) = -|x-2| + 3$ es derivable en $x = 2$.

Solución:

Inicialmente, debo analizar la continuidad de $f(x)$ en $x = 2$; con lo cual, reescribo $f(x)$ como una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x & ; x \geq 2 \\ x + 1 & ; x < 2 \end{cases}$$

Continuidad de $f(x)$ en $x = 2$:

a) $\exists f(2)$, porque $f(2) = 5 - 2 = 3$

b) $\exists \lim_{x \to 2} f(x)$, porque los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 3 \Rightarrow$$

Límite lateral de f(x) cuando x tiende a 2 por izquierda

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5 - x) = 3 \Rightarrow$$

Limite lateral de f(x) cuando x tiende a 2 por derecha

Lo que hace:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 3$$

c) Luego, como

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$

Concluimos que $f(x)$ es continua en $x = 2$.

Ahora, la continuidad de $f(x)$ en $x = 2$ me permite analizar la derivada por definición, en tal punto:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

Su existencia dependerá de las derivadas laterales

<u>Derivada lateral "al 2 por izquierda"</u>:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+1) - 3}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} 1$$

$$= 1$$

<u>Derivada lateral "al 2 por derecha"</u>:

$$f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(5 - x) - 3}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{2 - x}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} (-1)$$

$$= -1$$

Podemos afirmar que, como las derivadas laterales son diferentes; luego $f(x)$ no es derivable en $x = 2$ (es decir, $\nexists f'(2)$).

Nota: cualquiera de las notaciones a continuación para la derivada en un punto es equivalente. A saber:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad ; \qquad f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Puesto que hacemos un *cambio de variable*:

$$\Delta x = x - a$$

Tabla de derivadas

$$f(x) = a.x^n \to f'(x) = a.nx^{n-1}$$

$$f(x) = k \to f'(x) = 0 \qquad ; k \in R$$

$$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$$

$$f(x) = h(x).g(x) \to f'(x) = h'(x).g(x) + h(x).g'(x)$$

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \to f'(x) = \frac{h'(x).g(x) - h(x).g'(x)}{[g(x)]^2} \qquad ; g(x) \neq 0$$

$$f(x) = \ln(x) \to f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = sen(x) \to f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \cos(x) \to f'(x) = -sen(x)$$

$$f(x) = tg(x) \to f'(x) = sec^2(x)$$

$$f(x) = a^x \to f'(x) = \ln(a).a^x \qquad ; a > 0$$

$$f(x) = [g(x)]^n \to f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)$$

$$f(x) = sen[g(x)] \to f'(x) = \cos[g(x)].g'(x)$$

$$f(x) = cos[g(x)] \to f'(x) = -sen[g(x)].g'(x)$$

$$f(x) = e^{g(x)} \to f'(x) = e^{g(x)}.g'(x)$$

$$f(x) = tg[g(x)] \to f'(x) = sec^2[g(x)].g'(x)$$

$$f(x) = arctg[g(x)] \to f'(x) = \frac{g'(x)}{1 + [g(x)]^2}$$

$$f(x) = arcsen[g(x)] \to f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - [g(x)]^2}}$$

$$f(x) = arcos[g(x)] \to f'(x) = \frac{-g\prime(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$$