Límites

Un límite es, básicamente, un valor real finito, si existe. Podemos decir, entonces, que:

"El límite L para cierta función $f(x)$ es aquel valor que toma dicha función cuando x se acerca tanto como queramos a otro valor a. De este modo, decimos que el límite existe, y es igual a L"

Formalizando lo anterior:

La función f(x) puede estar definida o no, en x=a

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

"L" es un valor real finito

Decir que "x tiende al valor a" significa que puedo acercarme tanto como quiera a tal valor, pero nunca haciendo x=a, aunque en el límite suponga sustituir por tal valor, de modo práctico

Ejemplo:

Hallar el siguiente límite

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+3}{x-4}$$

Solución:

Como podemos acercarnos tanto como queramos a $x = -2$, procedemos por reemplazar tal valor en la función

$$f(x) = \frac{x+3}{x-4}$$

Así, obtendremos:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x+3}{x-4} = \frac{-2+3}{-2-4} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$$

En esencia, el límite existe (me dio un valor real finito), y es:

$$L = -\frac{1}{6}$$

Cuando es posible reemplazar (sustituir) en $f(x)$ el valor al cual x está tendiendo, se lo denomina *“Límite de sustitución directa”*. Este tipo de límites se caracteriza por devolver un valor real finito con sólo reemplazar el valor $x = a$ en tal función, efectivamente.

Límites de sustitución directa:

Aquellas funciones definidas para cierto valor $x = a$, tienen el privilegio de contar con un valor de límite finito, cuando hacemos el reemplazo directo (es decir, sin necesidad de reescribir la función, ya sea por factorización o uso de identidades, entre otras).

Se dice, formalmente, que $f(x)$ *es continua en* $x = a$ siempre que pudo calcularse el límite de forma directa. Consecuentemente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

En la práctica, optaremos por aplicar propiedades para resolver este tipo de límites, más allá de conocer a priori el valor de tal límite.

Propiedades del límite:

De modo útil, al calcular el límite directo para cierta función $f(x)$ continua en $x = a$, utilizaremos cualquiera de las siguientes propiedades (más adelante utilizaremos tales propiedades en otro tipo de límites, desde ya).

A saber:

1) El límite de una suma o diferencia de funciones, es la suma o diferencia de los límites (para cada función, por separado; es una propiedad de tipo distributiva):

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

2) El límite de un producto de funciones, es el producto de los límites:

$$\lim_{x\to a}[f(x).\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\, \lim_{x\to a} g(x)$$

3) El límite de una potencia, es la potencia del límite:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

4) El límite de una raíz de índice n para $f(x)$, es la raíz del límite (note que también puede enumerarse esta propiedad como una consecuencia del límite de una potencia, ya que la raíz es potencia fraccionaria de denominador n):

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = [\lim_{x\to a} f(x)]^{\frac{1}{n}}$$

5) El límite de una constante ($k \in R$), es la propia constante:

$$\lim_{x \to a} k = k$$

6) El límite de un cociente de funciones, es el cociente de los límites:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

7) Las constantes ($k \in R$), *salen fuera del límite*, siempre que sea posible:

$$\lim_{x \to a} k.f(x) = k.\lim_{x \to a} f(x)$$

Constante “dentro” del límite

Constante “fuera” del límite

8) El límite de una expresión exponencial, es la expresión exponencial de los límites:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = [\lim_{x \to a} f(x)]^{\lim_{x \to a} g(x)}$$

<u>Ejemplo</u>:

Calcular el siguiente límite, aplicando propiedades:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2}}{4x - 1}$$

Solución: Comenzamos sustituyendo cada x en la función, por el valor al cual tiende; es decir

Sustituimos en la expresión por $x = 5$, corroborando que existe tal valor, y $f(x)$ es continua en tal punto:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{4x-1} = \frac{\sqrt[3]{5^2+2}}{4.5-1} = \frac{\sqrt[3]{27}}{19} = \frac{3}{19}$$

En consecuencia, el límite existe y es:

$$L = \frac{3}{19}$$

Ahora, lleguemos al mismo resultado, aplicando propiedades.

Observemos que tenemos un cociente de funciones, primeramente:

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{4x-1} = \frac{\lim\limits_{x \to 5} \sqrt[3]{x^2+2}}{\lim\limits_{x \to 5}(4x-1)}$$

El límite de un cociente, es el cociente de los límites (es decir, informalmente, “distribuimos el límite arriba y abajo”; un límite para el numerador, y otro para el denominador).

Ahora, arriba tenemos el límite de una raíz, y debajo, el límite de una diferencia, aplicamos tales propiedades:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{4x-1} = \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 5}(x^2+2)}}{\lim\limits_{x\to 5}4x-\lim\limits_{x\to 5}1}$$

Dentro de la raíz, contamos con una suma; es decir, el límite de una suma, que se reescribirá como la suma de límites:

Este término tendrá su propio límite

Este término tendrá su propio límite

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x^2+2}}{4x-1} = \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 5}(x^2+2)}}{\lim\limits_{x\to 5}4x-\lim\limits_{x\to 5}1} = \frac{\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 5}x^2+\lim\limits_{x\to 5}2}}{\lim\limits_{x\to 5}4x-\lim\limits_{x\to 5}1}$$

El límite de una potencia, es la potencia del límite

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\lim\limits_{x\to 5}x\right)^2+\lim\limits_{x\to 5}2}}{4.\lim\limits_{x\to 5}x-\lim\limits_{x\to 5}1}$$

Estos son límites de constantes aisladas, que dejamos así, para finalmente aplicar su propiedad correspondiente

La constante 4 “salió afuera” del límite (como lo dice nuestra propiedad n° 7)

Finalmente, como se trata de un límite de sustitución directa, como verificamos al principio, podemos reemplazar en la expresión por $x = 5$:

El límite de la constante aislada 2, será 2

$$= \frac{\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to5} x\right)^2 + \lim_{x\to5} 2}}{4.\lim_{x\to5} x - \lim_{x\to5} 1} = \frac{\sqrt[3]{(5)^2 + 2}}{4.5 - 1} = \frac{\sqrt[3]{27}}{19} = \frac{3}{19}$$

El límite de la constante aislada 1, será 1

Como cabía esperar, llegamos al mismo resultado.

Ejercicios

Intentá lo siguiente. Cualquier límite a continuación se resuelve de modo directo. Utilizá las propiedades que veas aplicables, pero no olvides que lo esencial es, primero, verificar la *existencia numérica* de tal límite.

1) $\lim_{x\to0} \frac{e^x + \sqrt{2x - 5x^2}}{2 - x}$

2) $\lim_{x\to-1} 5.\sqrt[3]{x}.(4x - x^2)^x$

3) $\lim_{x\to0} \frac{(6x - 1)^2}{\sqrt{-x + 4}}$

4) $\lim_{x\to2} \frac{1 - 2x + x^2}{x^2 - x}$

Límites Indeterminados

La particularidad de los límites de sustitución directa radica en la evaluación de la función $f(x)$ en $x = a$, sin ir más lejos. Esto ocurría, como lo mencionamos, porque efectivamente $f(x)$ es continua en tal punto; de modo que $f(a)$ está definida, y el resultado es un *valor real determinado*.

Con frecuencia, el cálculo de un límite nos devuelve una expresión la cual no podemos evaluar de manera directa. Como consecuencia, obtenemos cualquiera de los siguientes resultados, constituyendo todos y cada uno de ellos, una indeterminación o “forma indeterminada”:

$$\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad 0^0 \quad ; \quad 1^\infty \quad ; \quad \infty - \infty$$

Ejemplo:

Calcular los siguientes límites

1) $\lim_{x \to -2} \frac{4x+8}{x+2}$

4) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}$

7) $\lim_{x \to 0} \frac{x.e^x + x^2}{x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x - x^3}{x}$

5) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

8) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-2x+1}{x^2+6x-7}$

3) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+10}-3}{x+1}$

6) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3}$

9) $\lim_{x \to -4} \frac{12+3x}{x+4}$

El tipo de indeterminación que encontramos al intentar evaluar de modo directo los límites anteriores es:

$$\frac{0}{0}$$

Esto se debe a que, tanto el numerador como el denominador de $f(x)$ contendrán factores con iguales raíces, a efectos de anularse al mismo tiempo, según se efectúe el reemplazo $x = a$.

Si bien a simple vista pueden no ser detectados, estos factores suelen "aparecer" a medida que reescribo a $f(x)$, ya sea factorizando (factor común, fórmula resolvente, método de Ruffini, común denominador, entre otros varios procedimientos ajustables a la función), o multiplicando y dividiendo por una misma expresión, según se verá más adelante con la "técnica del conjugado".

Volviendo al caso práctico, resolvamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x^3}{x}$$

Solución:

Observe que, primeramente, la función

$$f(x) = \frac{x - x^3}{x}$$

no es continua en $x = 0$, porque no está definida en tal punto. Es decir; el resultado de evaluación nos dará:

$$f(0) = \frac{0 - 0^3}{0} = \frac{0}{0} \quad (indeterminación)$$

De este modo, no podemos reconocer al límite como de sustitución directa, ya que, con pruebas contundentes, efectivamente no lo es. Se trata de un límite indeterminado.

Procedemos a aplicar factorización, tomando como factor común a "x":

"x" es la menor potencia entre estos dos términos, por eso sale factor común, ya que ambos la "poseen"

Como fuimos capaces de eliminar el factor que nos llevaba a una indeterminación, pudimos "salvar el límite", de modo de hacerlo evaluable

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - x^3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x.(1 - x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}(1 - x^2) = 1 - 0^2 = 1$$

Estos términos se cancelan entre sí, ya que uno está en el numerador, y otro en el denominador

El límite existe, y es 1

Concretamente, no siempre el procedimiento de factorizar y "cancelar" factores entre sí nos llevará a salvar el límite.

Intentemos resolver el siguiente problema:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$$

Hacemos un reemplazo directo, para corroborar se trata de un límite indeterminado:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2 - 2}{2^2 - 4.2 + 4} = \frac{0}{0}$$

Ahora, procedemos a factorizar el denominador, aplicando la *fórmula resolvente* y encontrando las raíces de la expresión cuadrática:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$$

x=2 es raíz doble, de modo que el factor (x-2) aparece dos veces

Pero, al evaluar este último límite, obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} = \frac{1}{0} = \infty$$

El denominador estará muy cerca de cero, tanto como queramos; aunque en la práctica solemos indicar tal resultado con un 0

El límite no existe.

<u>Nota</u>: el concepto de infinito denota una cantidad no numerable, sin tope alguno (estos topes formalmente se llaman "cota" superior o inferior, según corresponda).

En el límite anterior, recuerde que $x \to 2$ no significa que efectivamente x tome el valor 2 (es decir, $x-2$ no dará cero, pero sí "muy próximo" a cero), sino que me acercaré a ese valor tanto como quiera. De este modo, el cociente se irá incrementando gradualmente, y creciendo de manera no acotada, como consecuencia.

Factorización con el término conjugado:

Cuando el límite indeterminado cuyo argumento a factorizar contiene una raíz cuadrada, será útil aplicar una técnica que permite eliminar tal raíz, de modo de reescribir la expresión funcional, y encontrar los factores a cancelar, para "salvar" dicho límite.

Ejemplo:

Calcular

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3}$$

Evaluando la expresión funcional cuando $x = -3$, llegamos a una indeterminación del tipo:

$$\frac{0}{0}$$

De modo que es probable se comparta algún factor común entre numerador y denominador, de forma implícita (habrá que factorizar para ver cuáles son esos factores).

Procedemos a factorizar con la técnica del término conjugado. A saber:

Copio todo el límite como está

Multiplico por una fracción donde, tanto en el numerador como en el denominador, colocamos el conjugado del término con raíz cuadrada

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{\left(\sqrt{x+7}-2\right)}{(x+3)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+7}+2\right)}{\left(\sqrt{x+7}+2\right)}$$

El conjugado es la misma expresión, pero el signo opuesto "entre medio" de ambos términos (pasó de ser un – a un +)

Ahora, ¿qué utilidad tiene esta técnica?

Primeramente, tenemos que recordar que, si multiplicamos cierta expresión por un cociente cuyo numerador y denominador son iguales, tal fracción será la unidad, de modo que multiplicar la expresión funcional por ese cociente, permitirá que se siga manteniendo de forma equivalente tal expresión original.

¿Y por qué precisamos el conjugado?

Multiplicar una expresión con raíz cuadrada por su conjugado, nos genera una diferencia de cuadrados; y con esto podemos efectuar una *cancelación de raíz* junto con la potencia cuadrada. A modo de ejemplo:

<u>Encontrar una expresión equivalente para $2+\sqrt{x}$</u>:

<u>Solución</u>: multiplicamos por una fracción cuyo numerador y denominador sean el conjugado de $2+\sqrt{x}$. Entonces:

La misma expresión

$$2+\sqrt{x} = (2+\sqrt{x}).\frac{\overbrace{(2-\sqrt{x})}^{\text{conjugado}}}{\underbrace{(2-\sqrt{x})}_{\text{conjugado}}} = \frac{\overbrace{2^2-\sqrt{x}^2}^{\text{Diferencia de cuadrados, porque se multiplican expresiones iguales con distinto signo “entre medio”}}}{2-\sqrt{x}} = \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$$

Logramos “racionalizar” el numerador, eliminando la raíz cuadrada de éste. Por lo tanto, pudimos encontrar una expresión equivalente a $2+\sqrt{x}$.

<u>Nota</u>: tener en cuenta el dominio de la expresión equivalente hallada, de modo de no plantear igualdades no permitidas, para ciertos valores de x.

Volviendo al ejercicio donde hicimos una pausa:

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+7}-2}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{\left(\sqrt{x+7}-2\right)}{(x+3)} \cdot \frac{\left(\sqrt{x+7}+2\right)}{\left(\sqrt{x+7}+2\right)}$$

De modo que, generando la diferencia de cuadrados:

La diferencia de cuadrados hizo que la raíz se cancele con la potencia

$$\lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x+7}^{2} - 2^2}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)} = \lim_{x \to -3} \frac{x+7-4}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{(x+3)(\sqrt{x+7}+2)}$$

Pudimos obtener el factor que nos generaba la indeterminación inicial, de modo que, ahora, simplificamos y evaluamos el límite:

$$= \lim_{x \to -3} \frac{1}{(\sqrt{x+7}+2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-3+7}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

Es decir, que el límite existe, y es:

$$L = \frac{1}{4}$$

Factorización con método de Ruffini

Cuando el argumento funcional del límite se presenta como un cociente de polinomios, donde al menos uno de ellos tiene grado mayor a 2, será muy práctico aplicar factorización con el método de Ruffini.

Ejemplo:

Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \to 2} \frac{\overbrace{-2x^3 + 5x + 6}^{\text{Factorizable con Ruffini}}}{x - 2}$$

Solución: evaluamos directamente el límite, para notar que se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{-2x^3 + 5x + 6}{x - 2} = \frac{-2.2^3 + 5.2 + 6}{2 - 2} = \frac{-16 + 16}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Ahora, podemos asegurar que numerador y denominador comparten algún factor común, de modo que procedemos a factorizar con el método indicado.

	x^3	x^2	x^1	x^0
	-2	0	5	6
raíz → 2		-4	-8	-6
	-2	-4	-3	0

Un factor será: x – 2 (con la “raíz” siempre se arma un factor lineal)

$x - 2$

Otro factor es el polinomio “resultado”

$-2x^2 - 4x - 3$

No olvidar que se le baja un grado al polinomio “resultado”

Según lo anterior, podemos reescribir el límite de la siguiente manera:

La factorización de $-2x^3+5x+6$, en otros dos polinomios

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2x^3+5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(-2x^2-4x-3)}{x-2}$$

Y, eliminando factores iguales:

$$\lim_{x\to 2}(-2x^2-4x-3) = -2.2^2-4.2-3 = -19$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-2x^3+5x+6}{x-2} = -19$$

<u>Nota</u>: Si al factorizar los polinomios numerador y/o denominador, consigue encontrar factores iguales, para luego simplificar la expresión, pero al reemplazar nuevamente por $x=a$ sigue dando la indeterminación $\frac{0}{0}$; entonces deberá seguir factorizando, puesto que ello significa aún se sigue compartiendo algún otro factor, y hay que encontrarlo.

Límites laterales

Al analizar la existencia de un límite cuando $x \to a$, debemos tener en cuenta, como hemos visto, si tal función está definida (o no), en dicho punto. Esto podía verificarse evaluando $f(x)$ en $x = a$, de modo práctico y con el fin de obtener información sobre la continuidad de la función para ese valor.

Resulta importante notar aquí que no siempre podemos asegurar que $f(x)$ sea continua en un punto, con sólo evaluarla en él. Esto es así, porque hay funciones denominadas "a trozos", que están definidas como la "unión" de distintas curvas, y en tales puntos de unión (generalicemos, puntos $x = x_0$), uno puede esperar que:

- $f(x)$ es continua en $x = x_0$; ó
- $f(x)$ es discontinua en él

En el primer caso, las curvas que forman a $f(x)$ llegaron a unirse, de modo de no dejar ningún "hueco" o "salto" entre ellas, con lo cual podría trazar su gráfica sin levantar el lápiz del papel, dicho de algún modo.

En el segundo caso, no me es posible "juntar" las curvas gráfico de $f(x)$ en en ese punto determinado, ya que sucedió alguna anomalía nombrada inmediatamente arriba.

Tales anomalías serán estudiadas a continuación, pero antes debemos aclarar a qué nos referimos con el concepto de *límites laterales*.

Ejemplo:

Determinar si existe:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \quad ;$$

Siendo $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; x > 1 \\ 3 & ; x = 1 \\ 5x - 4 & ; x < 1 \end{cases}$

Note primeramente que la función está definida por dos curvas diferentes, y un punto en el plano ; a saber:

- Un “trozo de parábola”, descrita por $f(x) = 2x - x^2$; donde no tomamos toda la curva parabólica, sino que nos quedamos con tal gráfico cuando $x > 1$

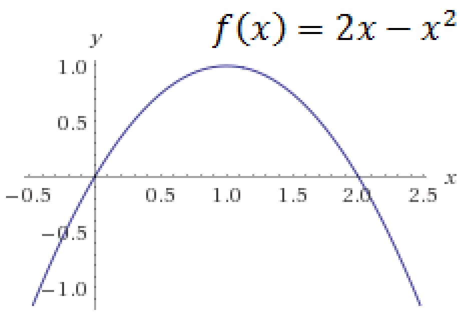


Gráfico de la curva parabólica "completa"

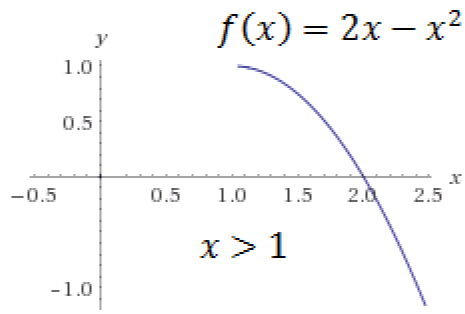


Gráfico de la curva parabólica, tomando sólo cuando x > 1

- Un “trozo de recta”, descrita por $f(x) = 5x - 4$; quedándonos con la curva gráfico cuando $x < 1$

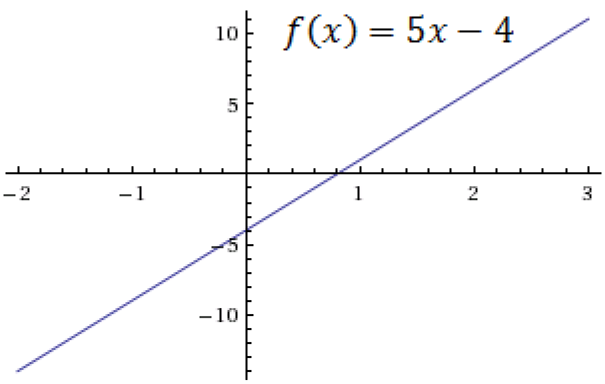


Gráfico "completo" de f(x)=5x-4

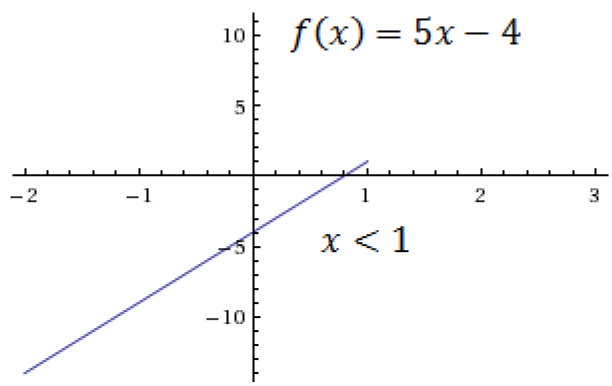
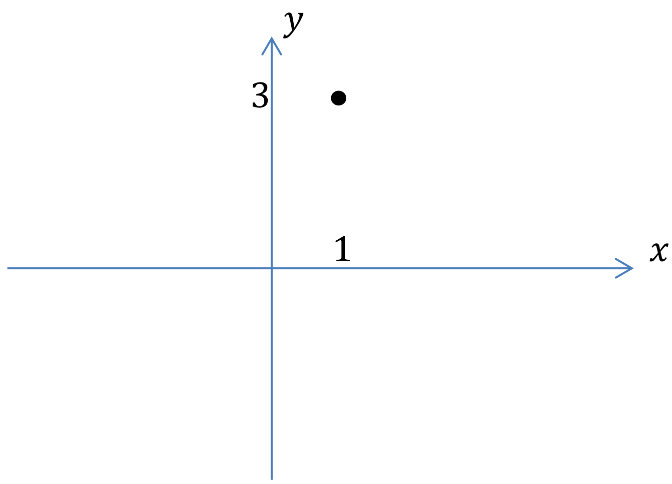


Gráfico de f(x)=5x-4, cuando x < 1

- Un punto en el plano: $P(1,3)$ (es decir; $f(1) = 3$)



Si uniéramos los gráficos definidos a trozos anteriores, obtendríamos el gráfico de la función $f(x) - definida\ \ a\ trozos, respectivamente -$ que planteamos al principio del análisis.

El resultado sería el siguiente:

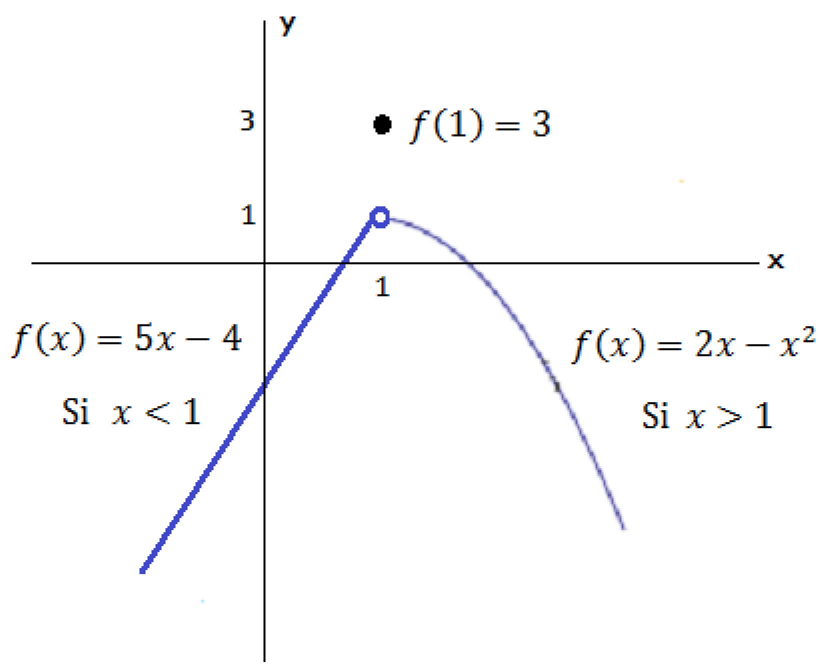


Gráfico de la función f(x), definida a trozos. Nótese la discontinuidad en x = 1

Volvamos ahora al problema de calcular el límite de

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & ; x > 1 \\ 3 & ; \ x = 1 \\ 5x - 4 & ; \ x < 1 \end{cases}$$

Cuando $x \to 1$.

Debemos observar que

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

dependerá de los límites laterales, ya que la función está definida a trozos, y el valor $x = 1$ es donde se "unen" las distintas curvas de $f(x)$ (tendremos una curva parabólica por un lado, y una semirrecta por el otro).

Por lo tanto, hacemos:

Límite lateral al 1 "por izquierda" (por eso convencionalmente se usa el signo "menos" (-) como supraíndice)

Reemplazamos f(x) por la función que le corresponde cuando x < 1 (es decir, cuando me acerco "por izquierda" a x = 1)

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (5x - 4) = 5.1 - 4 = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x - x^2) = 2.1 - (1)^2 = 1$$

Límite lateral al 1 "por derecha", usamos el supraíndice "más" (+)

Reemplazamos f(x) por la función que le corresponde cuando x > 1 (es decir, cuando me acerco "por derecha" a x = 1)

Como los límites laterales son iguales, el límite que dependía de éstos existe, y toma el mismo valor.

Es decir:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

<u>Nota</u>: si los límites laterales son iguales (nos da el mismo escalar, cualquier número real finito), el límite que depende de ellos existe y toma el mismo valor. En caso los límites laterales fueran diferentes (o alguno de ellos o ambos escaparan al infinito; es decir, obtuviéramos $\pm\infty$ como resultado de evaluación), decimos que el límite no existe.

<u>Aplicación del límite y asíntotas</u>

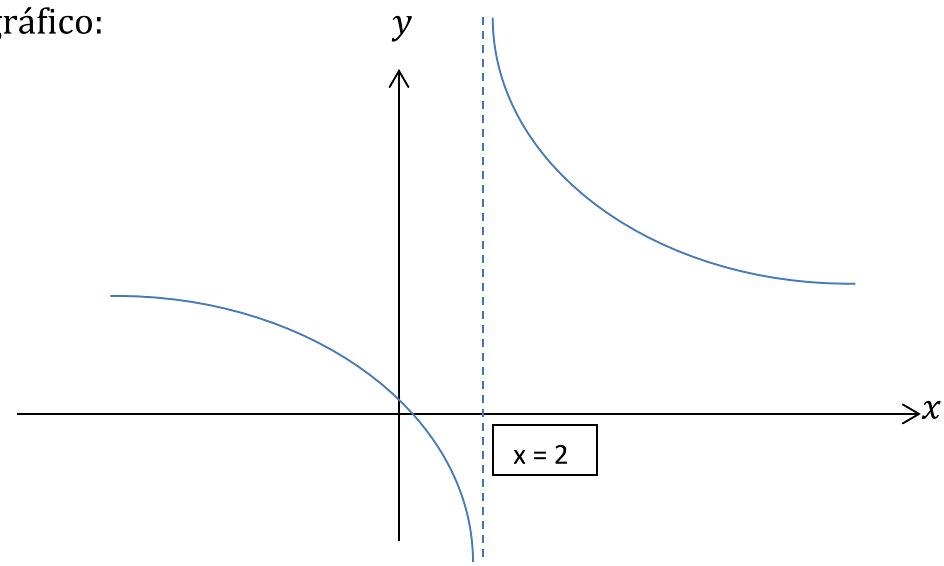
Al determinar la existencia de un límite funcional para cierto valor $x = a$, estamos suponiendo, al menos, dos cosas (excluyendo las funciones a trozos al principio):

- ✓ Que la función está definida en $x = a$ (continua en tal punto); con lo cual obtendría un límite de sustitución directa, ó
- ✓ La función no es continua en $x = a$, de modo que presenta algún tipo de discontinuidad, respectivamente (con lo cual tendré una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$; salvable en lo posible, o una discontinuidad esencial)

Nos centraremos en el análisis de la discontinuidad de una función $f(x)$ en ciertos valores x; desde ya, fuera del dominio de la misma (puesto que, si la función no es continua en esos puntos, se encontrarán restringidos del dominio).

Cuando una función presenta un valor límite en el infinito (indistintamente si es *positivo* o *negativo*), sabemos que tal límite no existe, como vimos al principio. Ahora, este comportamiento del límite nos da una pauta de cómo hallar una asíntota vertical (recta vertical que la gráfica jamás llega a tocar), mediante un análisis sencillo.

Ejemplo gráfico:



Observando el gráfico, podemos establecer lo siguiente:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \qquad (\textit{este límite depende de los límites laterales})$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$$

Como el límite lateral al 2 “por izquierda” está en el infinito (con uno que escape al infinito es suficiente), podemos decidir de manera instantánea que:

$$\nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

Y utilizamos la definición de *asíntota vertical*, mediante el límite, para establecer que $x = 2$ es, efectivamente, una asíntota vertical de $f(x)$ (cuyo gráfico quedó plasmado arriba).

Definición de Asíntota vertical

$x = a$ es asíntota vertical de $f(x)$ siempre y cuando:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty}$$

Nota: generalmente se emplea el cálculo de los límites laterales para visualizar el comportamiento de la función tanto a izquierda como a derecha de la asíntota vertical; aunque de modo práctico hallemos una expresión que refleja un crecimiento no acotado (es decir, al calcular el límite, nos devuelve "infinito") para demostrar que en tal punto se encuentra la asíntota vertical.

Ejemplo:

Hallar, si existe, la asíntota vertical de

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

Buscamos el dominio de $f(x)$, de modo de obtener aquellos valores para los cuales la función no está definida (posiblemente estos valores sean asíntotas verticales).

Observemos se trata de una función racional, y hay que factorizar el denominador para efectuar nuestra búsqueda.

Notemos que

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x^2 - 9}{(x-2)(x-3)}$$

Con lo cual:

$$Dom\ f(x) = R - \{2; 3\}$$

Y las posibles asíntotas verticales para la función $f(x)$ son $x = 2$ y $x = 3$; ya que estos valores anulan el denominador (estableciendo la discontinuidad de dicha función en tales puntos).

Ahora, ¿cómo sabemos cuál de los dos puntos determina una asíntota vertical? Bien podrían ser ambos, o uno, o ninguno de ellos.

Procedemos a calcular el límite dado por la definición de asíntota vertical, y corroborar que, en efecto, cuando determino tal asíntota se produce un “escape al infinito”.

<u>Analizo cuando $x \to 2$:</u>

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x-2} = \frac{5}{0} = \infty$$

Como el resultado concuerda con la tendencia o “escape al infinito” de $f(x)$ a medida que me acerco a $x = 2$, podemos determinar que:

$x = 2$ es la ecuación de la Asíntota Vertical de $f(x)$

Analizo cuando $x \to 3$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x-2} = \frac{6}{1} = 6$$

El resultado no contrasta con la definición de asíntota vertical, porque no obtuve una tendencia al infinito cuando $x \to 3$.

De este modo, $x = 3$ no es una asíntota vertical de $f(x)$.